CONCOURS BLANC — DEVOIR S. # 5

le Jeudi 07/01/2021, 13h30 ⟶ 16h

Épreuve de format «**Calculs & Raisonnements**» du concours A-ENV.

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Problème 1 *Modèle aléatoire de croissance épidémique* (Solution : 5)

Dans tout le problème, les objets aléatoires seront définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ que nous n'expliciterons pas.

Le but de ce problème est l'étude de deux modèles de propagation d'un virus. Les deux parties sont indépendantes. Dans tout ce problème, on considère une population $\mathscr{P}$ d'individus, chacun pouvant être porteur d'un virus V. Une unité de temps étant fixée (minute, heure, jour, selon la situation), on note X_0 le nombre d'individus de $\mathscr{P}$ porteurs de V à l'instant initial de l'étude (c'est donc un entier non aléatoire fixé), et plus généralement X_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus porteurs de V après n unités de temps, avec $n \in \mathbf{N}$.

La première partie se penche sur un modèle où la dépendance de X_{n+1} en fonction de X_n est fournie par une matrice que nous appellerons matrice de transition. La seconde partie étudie un modèle où X_n est proportionnel à X_{n-1} à chaque instant n.

Dans tout le problème, $\mathbf{E}(X)$ désignera, lorsqu'elle existe, l'espérance de la variable aléatoire X. Pour tout évènement A, on rappelle que $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire définie sur l'univers, valant 1 sur A et 0 ailleurs. On pourra utiliser librement les faits suivants dans le problème :

- L'espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance est égale au produit des espérances.
- Si X est indépendante de U, où X, U sont deux variables aléatoires, alors les variables aléatoires $\mathbb{1}_{\{U=\beta\}}$ et X sont encore indépendantes pour tout réel β.

Partie I — Évolution modélisée par une chaîne de Markov

On suppose dans cette partie que la population $\mathscr{P}$ est de taille N. Le modèle suivant est fondé sur l'hypothèse d'un virus V peu dangereux (guérison très rapide) mais très contagieux. On suppose que la propagation de V suit le schéma suivant : si l'on admet qu'à l'instant $n \in \mathbf{N}^\star$, on a $X_n = i \in \{0, \dots, N\}$ individus porteurs de V, et donc $N - i$ individus sains (c'est-à-dire non-porteurs de V), alors

- chacun des i porteurs devient sain à l'instant $n+1$;
- chacun des $N-i$ individus sains a une probabilité $p \in]0,1[$ (indépendante de n et de i) de devenir porteur de V, de façon indépendante les uns des autres. On notera dans la suite $q = 1 - p$.

Pour $(i,j) \in \{0,\dots,N\}^2$, on note $q_{i,j}$ la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$. Par ailleurs on décide de numéroter les lignes et les colonnes d'une matrice à partir de zéro ; ainsi le coefficient $(0,0)$ sera celui de la première ligne et de la première colonne, et le $(0,1)$ celui de la première ligne et de la deuxième colonne.

Dans toute cette partie, on pourra utiliser librement le fait que $\widehat{P}$ =

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2p & -p+1 & -2 \\ p^2 & p & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse

$$\left(\widehat{\mathrm{P}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2p & p^2 \\ 1 & -p+1 & -p \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, si $(\mathrm{M}_n)_n$ est une suite de matrices, on dira que $(\mathrm{M}_n)_n$ converge si tous ses coefficients convergent. En cas de convergence on notera $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}_n$ la matrice obtenue en prenant la limite coefficient par coefficient. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{(-1)^n}{n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Et enfin, on pourra utiliser librement le résultat suivant : si $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ sont deux matrices fixées telles que le produit matriciel $\mathrm{P}_1\mathrm{M}_n\mathrm{P}_2$ existe pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors si $(\mathrm{M}_n)_n$ converge, c'est aussi le cas de $(\mathrm{P}_1\mathrm{M}_n\mathrm{P}_2)_n$ et

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{P}_1\mathrm{M}_n\mathrm{P}_2) = \mathrm{P}_1 \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}_n\right) \mathrm{P}_2.$$

1 — ***(Cas*** $\mathrm{N}=2$***)*** On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 0) \\ \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 1) \\ \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 2) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M} = \left(q_{i,j}\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant 2 \\ 0\leqslant j\leqslant 2}}.$$

On prendra garde au fait que M est une matrice 3×3 dont les lignes et les colonnes sont ici numérotées de 0 à 2.

1.1) Pour $j \in \{0,\dots,\mathrm{N}\}$, reconnaitre la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathrm{X}_n = j$.

1.2) En déduire que :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} q^2 & q & 1 \\ 2pq & p & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{U}_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

1.4) En déduire par récurrence l'expression de U_n en fonction d'une puissance de M, et U_0.

1.5) Montrer que $1, -p, p^2$ sont les valeurs propres de M, et déterminer une base de vecteurs propres associés. *On évitera au maximum les formes fractionnaires dans les coordonnées des vecteurs propres : pour une base de* $\mathrm{E}_1(\mathrm{M}), \mathrm{E}_{-p}(\mathrm{M})$ *et* $\mathrm{E}_{p^2}(\mathrm{M})$ *on obtiendra des vecteurs propres ayant pour dernière coordonnée* p^2, p *et* 1.

1.6) En déduire que M est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et P inversible telles que : $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

1.7) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\quad \mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}^n$?

1.8) Déterminer pour tout $k \in \{0,1,2\}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = k)$. Interpréter la valeur obtenue en terme de propagation du virus.

1.9) ***(Interprétation algébrique de*** M***)*** On va chercher à interpréter M comme une matrice d'un endomorphisme d'un espace de polynômes. On note E l'espace vectoriel $\mathbf{R}_2[\mathrm{X}]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 et Φ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de E est M.

- **i)** Montrer que pour tout $k \in \{0,1,2\}$, on a : $\phi\left(\mathrm{X}^k\right) = (p\mathrm{X}+1-p)^{2-k}$.
- **ii)** À l'aide des questions précédentes, donner sous forme factorisée trois polynômes $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ tels que $\phi(\mathrm{P}_k) = (-p)^k\mathrm{P}_k$ pour $k \in \{0,1,2\}$.

2 — ***(Cas*** N ***quelconque)*** On généralise maintenant une partie des résultats de la question dédiée au cas $\mathrm{N}=2$ à une valeur de $\mathrm{N} \in \mathbf{N}^\star$ quelconque. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X_n = N) \end{pmatrix}, \quad M = \left(q_{i,j}\right)_{\substack{0 \leqslant i \leqslant N \\ 0 \leqslant j \leqslant N}}.$$

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}_N[X]$ muni de sa base canonique $\left(1, X, \dots, X^N\right)$, on considère l'endomorphisme ϕ de matrice M dans la base canonique.

2.1) Justifier, avec un argumentaire précis, la formule suivante : pour tout $(i, j) \in \{0, \dots, N\}^2$,

$$q_{i,j} = \binom{N-j}{i} p^i (1-p)^{N-j-i}.$$

2.2) En déduire que :

$$\phi\left(X^k\right) = (pX + 1 - p)^{N-k} \quad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, N\}.$$

En s'inspirant des résultats du cas $N = 2$, on conjecture que les valeurs propres de M sont les $(-p)^k$ avec $k \in \{0, \dots, N\}$ et que la valeur propre $(-p)^k$ a pour vecteur propre associé

$$P_k = (pX + 1)^{N-k}(X-1)^k, \quad k \in \{0, \dots, N\}.$$

2.3) On souhaite vérifier cette hypothèse par un calcul direct en utilisant le résultat de la question 2.2. Soit $k \in \{0, \dots, N\}$.

i) Justifier la formule suivante :

$$P_k = \sum_{i=0}^{N-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{N-k}{i} \binom{k}{j} p^i (-1)^{k-j} X^{i+j}.$$

ii) En utilisant le résultat de la question 2.2, montrer que P_k est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre $(-p)^k$.

2.4) En déduire que M est diagonalisable, et donner une matrice diagonale D telle qu'il existe une matrice P inversible vérifiant $M = PDP^{-1}$ — on ne demande pas d'expliciter P.

2.5) Calculer pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$, $\sum_{i=0}^{N} q_{i,j}$. Retrouver alors une valeur propre de ${}^{\top}M$. Est-elle valeur propre de M ?

2.6) Déterminer un vecteur propre, sous forme de vecteur colonne, associé à la valeur propre 1 en utilisant les questions précédentes.

2.7) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite matricielle $(M^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente. Déterminer la matrice limite en fonction de P, P^{-1}, interpréter.

Partie II — Évolution proportionnelle

Dans cette partie, on propose d'étudier une situation où, à un instant donné n, l'agent contaminant responsable de la transmission de V peut être actif ou inactif (en raison de facteurs extérieurs qu'on ne cherche pas à étudier ici) : à tout instant n, on note :

- p la probabilité qu'il soit actif,
- $1 - p$ la probabilité qu'il soit inactif, avec $p \in]0, 1[$.

On considère de ce fait une suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires de même loi de Bernoulli de paramètre p. On supposera de plus que les U_n sont mutuellement indépendantes, et que pour tout $n \in \mathbf{N}$: U_n est indépendante de X_n.

On convient que lorsque l'agent contaminant est actif à l'instant $n \in \mathbf{N}$, le nombre d'individus de $\mathscr{P}$ contaminés augmente d'un facteur $\alpha \in]0, 1[$ entre les instants n et $n + 1$, si bien qu'on a :

$$U_n = 1 \implies X_{n+1} = (1 + \alpha) X_n.$$

Dans le cas contraire, on conviendra d'une diminution :

$$U_n = 0 \implies X_{n+1} = (1 - \alpha) X_n.$$

sera déclaré *modèle admissible* si la suite $\left(\mathbf{E}(X_n)\right)$ est une suite numérique bornée.

<u>On admettra dans cette partie que X_n possède bien une espérance pour tout $n \in \mathbf{N}$</u>[1]

3 — Soit A un évènement. Déterminer la loi de la variable aléatoire discrète $\mathbb{1}_A$, et montrer que : $\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_A\right) = \mathbf{P}(A)$.

4 — Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ un entier fixé dans toute cette question. On rappelle qu'une variable aléatoire est une application, et que deux variables aléatoires sont égales si elles sont égales en tant qu'application.

4.1) Établir que $X_n = (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1}$. <u>*Indication :*</u> *On pourra commencer par vérifier la formule pour les* $\omega \in \Omega$ *tels que* $U_{n-1}(\omega) = 1$.

4.2) On souhaite trouver dans cette question une relation de récurrence pour la suite des espérances de X_n.

i) Justifier l'égalité ci-dessous :

$$X_n = (1+\alpha)X_{n-1}\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=1\}} + (1-\alpha)X_{n-1}\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=0\}}.$$

<u>*Indication :*</u> *On pourra commencer par vérifier la formule pour les* $\omega \in \Omega$ *tels que* $U_{n-1}(\omega) = 1$.

ii) En déduire que :

$$\mathbf{E}\left(X_n\right) = (1+(2p-1)\alpha)\mathbf{E}\left(X_{n-1}\right).$$

iii) Déterminer $\mathbf{E}\left(X_n\right)$ en fonction de $\mathbf{E}\left(X_0\right)$ et de n.

4.3) En supposant que $\mathbf{E}\left(X_0\right) > 0$, pour quelles valeurs de p a-t-on $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(X_n\right) = \infty$?

4.4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le modèle soit admissible.

5 — On pose dans la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

5.1) Rappeler la loi de S_n en justifiant.

5.2) Montrer que

$$X_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}X_0.$$

5.3) On note $f : x \longmapsto (1+\alpha)^x$ et $g : x \longmapsto (1-\alpha)^x$. Déterminer les ensembles de définition et la monotonie de chacune des fonctions.

[1] Point pouvait être facilement vérifié par récurrence

5.4) Quelle est, en fonction de X_0, la valeur maximale notée M_n que peut prendre X_n ?

5.5) Si $X_0 > 0$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty$.

Le résultat précédent semble empêcher la possibilité que le modèle proposé soit raisonnable. Néanmoins, ce maximum M_n n'est atteint que s'il y a eu contamination en chaque étape. Si p est faible et n grand, la probabilité d'avoir une telle séquence est faible.

CORRECTION

Solution (problème 1) (Énoncé : 1)

Partie I — Évolution modélisée par une chaîne de Markov

Pour $(i,j) \in \{0,\dots,N\}^2$, on rappelle que l'on note $q_{i,j}$ la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$.

1 — *(Cas* $N = 2$*)* On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}, \quad M = \left(q_{i,j}\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant 2\\ 0\leqslant j\leqslant 2}}.$$

On prendra garde au fait que M est une matrice 3×3 dont les lignes et les colonnes sont numérotées de 0 à 2.

1.1) Soit $j \in \{0,\dots,N\}$, sachant l'évènement $\{X_n = j\}$, X_{n+1} représente donc le nombre de succès (ici, un succès étant de probabilité p et correspond à la contamination d'un individu sain donné par le virus) dans $N - i$ (le nombre d'individu sain) expériences de Bernoulli répétées de manière indépendante (puisque les contaminations sont supposées indépendantes). Donc

$\boxed{\text{la loi conditionnelle de } X_{n+1} \text{ sachant } X_n = j \text{ est une } \mathscr{B}(N-j,p).}$

1.2) Soit donc $i \in \{0,\dots,2\}$, alors d'après la formule du cours sur la loi binomiale avec $N = 2$, nous déduisons

$$\boxed{q_{i,j} = \binom{2-j}{i} p^i q^{2-j-i}.}$$

Par exemple, pour $i = j = 0$, cela donne

$$q_{0,0} = \binom{2}{0} 1 q^2 = q^2.$$

On obtient le coefficient $(0,0)$ de la matrice, on fait de-même ensuite pour les autres, on déduit la matrice :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} q^2 & q & 1 \\ 2pq & p & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

1.3) Soit $i \in \{0,\dots,N\}$. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $\{X_n = j\}_{j=0,\dots,N}$. On obtient alors

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{P}(X_{n+1} = i \mid X_n = j)\, \mathbf{P}(X_n = j).$$

Ainsi, avec les notations du problème on déduit

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{N} q_{i,j} \mathbf{P}(X_n = j).$$

Cette égalité correspond à la ligne i du produit matriciel $U_{n+1} = MU_n$. Ainsi, faisant cela pour tout $i \in \{0,1,2\}$, nous déduisons la formule

$$\boxed{U_{n+1} = MU_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

1.4) Montrons par récurrence la formule $U_n = M^n U_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, nous avons bien $U_0 = U_0$.

Hérédité. Supposons-là vraie au rang n. Alors $U_{n+1} = MU_n = MM^n U_0 = M_{n+1} U_0$ en utilisant l'hypothèse de récurrence. La formule est donc héréditaire et donc par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{U_n = M^n U_0}.$$

1.5) Montrons que $1, -p, p^2$ sont bien les valeurs propres de M. Soit donc

$\lambda \in \mathbf{C}$, alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_3 &= \begin{pmatrix} q^2-\lambda & q & 1 \\ 2pq & p-\lambda & 0 \\ p^2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{\mathrm{L}}{\overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\sim}} \begin{pmatrix} p^2 & 0 & -\lambda \\ 2pq & p-\lambda & 0 \\ q^2-\lambda & q & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\mathrm{L}}{\overset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow p\mathrm{L}_2-2q\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow p^2\mathrm{L}_3-(q^2-\lambda)\mathrm{L}_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} p^2 & 0 & -\lambda \\ 0 & p(p-\lambda) & 2q\lambda \\ 0 & p^2q & p^2+\lambda(q^2-\lambda) \end{pmatrix} \\
&\underset{\mathrm{L}}{\overset{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}{\sim}} \begin{pmatrix} p^2 & 0 & -\lambda \\ 0 & p^2q & p^2+\lambda(q^2-\lambda) \\ 0 & p(p-\lambda) & 2q\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{\mathrm{L}}{\overset{\mathrm{L}_3 \leftarrow pq\mathrm{L}_3-(p-\lambda)\mathrm{L}_2}{\sim}} \begin{pmatrix} p^2 & 0 & -\lambda \\ 0 & p^2q & p^2+\lambda(q^2-\lambda) \\ 0 & 0 & \mathrm{P}(\lambda) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Avec P le polynôme qui suit :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\lambda) &= 2pq^2\lambda-(p-\lambda)(p^2+\lambda(q^2-\lambda)) \\
&= -\lambda^3+(p+q^2)\lambda^2+\lambda p(p+q^2)\lambda+2p(p^2-q^2) \\
&= -\lambda^3+(p^2-p+1)\lambda^2+p(p^2-p+1)\lambda-p^3, \\
&= -(\lambda-1)(\lambda+p)(\lambda-p^2).
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{\operatorname{Spec}\mathrm{M} = \left\{1,-p,p^2\right\}}$. Calculons à présent les espaces propres.

- pour $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_1(\mathrm{M})$ si et seulement si

$$
\begin{cases} p^2x-z &= 0 \\ p^2qy+(p^2+q^2-1)z &= 0 \end{cases} \iff \quad z = p^2x, p^2qy-2pqz = 0,
$$

car $(p+q)^2 = 1^1 = p^2+q^2+2pq$ donc $p^2+q^2-1 = -2pq$. On obtient alors

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_1(\mathrm{M}) \iff z = p^2x, \quad z = \frac{p}{2}y.
$$

Donc : $\boxed{\mathrm{E}_1(\mathrm{M}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ p^2 \end{pmatrix}}$.

- pour $\lambda = -p$: on trouve $\boxed{\mathrm{E}_{-p}(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -p+1 \\ p \end{pmatrix}}$ après calculs.

- pour $\lambda = p^2$: on trouve $\boxed{\mathrm{E}_{p^2}(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ après calculs.

1.6) Nous avons trois valeurs propres distinctes car $p \in]0,1[$ en dimension 3 donc M est diagonalisable. De plus, nous avons

$$\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}, \text{ avec } \boxed{\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}}, \quad \boxed{\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2p & -p+1 & -2 \\ p^2 & p & 1 \end{pmatrix}}.$$

1.7) Montrons que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

Initialisation. La propriété est initialisée en $n = 0$, puisque $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_3 = \mathrm{PI}_3\mathrm{P}^{-1}$.

Hérédité. Supposons-là vraie au rang n. Alors $\mathrm{M}^{n+1} = \mathrm{M}^n\mathrm{M} = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$. La propriété est donc héréditaire. Et on a bien :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{\mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}}.$$

Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}^n$? Par définition, on regarde la limite coefficient par coefficient de la matrice D^n. Puisque $|p| < 1$, nous avons $|(-p)| < 1$ et $|p^2| < 1$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 0 & 0 & p^{2n} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

1.8) Déterminer pour tout $k \in \{0,1,2\}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = k)$. D'après les résultats sur les limites de matrices donnés en énoncé, nous avons la convergence de chaque suite $(\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 0))_n, (\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 1))_n, (\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 2))_n$ puisque (D^n) converge. Et

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 0) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 1) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 2) \end{pmatrix} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}_0.$$

Or, $\mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2p & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et en utilisant la matrice inverse donnée par l'énoncé (finalement $\mathrm{P} = \widehat{\mathrm{P}}$) on trouve :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2p & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2p & p^2 \\ 1 & -p+1 & -p \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2p & p^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 0) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 1) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2p & p^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 0) \\ \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 1) \\ \mathbf{P}(\mathrm{X}_0 = 2) \end{pmatrix}}.$$

Interprétons la valeur obtenue en terme de propagation du virus : on voit alors que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = i) = 0$ pour $i \in \{1,2\}$ en effectuant le produit matriciel, ainsi le nombre d'infectés va asymptotiquement tendre vers zéro en loi, *i.e.* la probabilité que le nombre d'infectés soit non nulle tend vers zéro.

1.9) ***(Interprétation algébrique de*** M***)***

i) Soit $k \in \{0,1,2\}$, on a par définition d'une matrice

$$\phi(1) = q^2 1 + 2pq\mathrm{X} + p^2\mathrm{X}^2 = (p\mathrm{X}+q)^2,$$
$$\phi(\mathrm{X}) = q1 + p\mathrm{X} = (p\mathrm{X}+q)^1,$$
$$\phi(\mathrm{X}^2) = 1 = (p\mathrm{X}+q)^0.$$

Donc de manière générale : $\boxed{\phi\left(\mathrm{X}^k\right) = (p\mathrm{X}+1-p)^{2-k}}$.

ii) Reprenons les vecteurs propres obtenus précédemment. Nous avons

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathscr{M}\text{at}}\left(P_0\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ p^2 \end{pmatrix}.$$

Donc $P_0 = 1 + 2pX + p^2X^2 = \boxed{(pX+1)^2}$. De-même :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathscr{M}\text{at}}\left(P_1\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -p+1 \\ p \end{pmatrix}, \quad \underset{\mathscr{B}}{\mathscr{M}\text{at}}\left(P_2\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $P_1 = pX^2 + (1-p)2X - 1 = \boxed{(pX+1)(X-1)}$ et $P_2 = X^2 - 2X + 1 = \boxed{(X-1)^2}$.

2 — *(Cas* N *quelconque)*

2.1) Soit $j \in \{0, \dots, N\}$, sachant l'évènement $\{X_n = j\}$, X_{n+1} représente donc toujours le nombre de succès (ici, un succès étant de probabilité p et correspond à la contamination d'un individu sain donné par le virus) dans $N-i$ (le nombre d'individu sain) expériences de Bernoulli répétées de manière indépendante (puisque les contaminations sont supposées indépendantes). Donc la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $X_n = j$ est une $\mathscr{B}(N-j, p)$. Donc =

$$\boxed{q_{i,j} = \binom{N-j}{i} p^i (1-p)^{N-j-i}}.$$

2.2) Soit $k \in [\![0\,,\,N]\!]$. Alors par définition d'une matrice

$$\phi\left(X^k\right) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N-k}{i} p^i (1-p)^{N-k-i} X^i = \sum_{i=0}^{N} \binom{N-k}{i} (pX)^i (1-p)^{N-k-i}.$$

Puis en utilisant la formule du binôme :

$$\boxed{\phi\left(X^k\right) = (pX + 1 - p)^{N-k}} \quad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, N\}.$$

En s'inspirant des résultats du cas $N = 2$, on conjecture alors que les valeurs propres de M sont les $(-p)^k$ avec $k \in \{0, \dots, N\}$ et que la valeur propre $(-p)^k$ a pour vecteur propre associé

$$P_k = (pX+1)^{N-k}(X-1)^k, \quad k \in \{0, \dots, N\}.$$

2.3) Soit $k \in \{0, \dots, N\}$.

i) Il suffit d'appliquer la formule du binôme à chaque terme. En effet,

$$P_k = \left(\sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} p^i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j (-1)^{k-j}\right).$$

En rentrant la somme en j dans celle en i et en utilisant que $X^{i+j} = X^i X^j$, on déduit

$$\boxed{P_k = \sum_{i=0}^{N-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{N-k}{i} \binom{k}{j} p^i (-1)^{k-j} X^{i+j}.}$$

ii) On calcule $\phi(P_k)$. Puisque ϕ est linéaire, on a :

$$\begin{aligned}
&\phi(P_k)\\
&= \sum_{i=0}^{N-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{N-k}{i}\binom{k}{j}p^i(-1)^{k-j}\phi\left(X^{i+j}\right),\\
&= \sum_{i=0}^{N-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{N-k}{i}\binom{k}{j}p^i(-1)^{k-j}(pX+1-p)^{N-i-j}\\
&= \sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}p^i\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(pX+1-p)^{N-i-j}\\
&= \sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}p^i(pX+1-p)^{N-i-k}\times\\
&\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}1^j(-1)^{k-j}(pX+1-p)^{k-j}\\
&= \sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}p^i(pX+1-p)^{N-i-k}(1-pX-1+p)^k\\
&= (p+pX+1-p)^{N-k}(1-pX-1+p)^k\\
&= (pX+1)^{N-k}(-p)^k(pX-1)^k\\
&= \boxed{(-p)^kP_k.}
\end{aligned}$$

question sur $\phi(X^k)$

$(pX+1-p)^{N-i-j} = (pX+1-p)^{k-j}(pX+1-p)^{N-i-k}$

binôme en j

binôme en i

2.4) Nous avons montré que $\operatorname{Spec} M = \left\{(-p)^k,\ k=0,\dots,N\right\}$. On justifie sans difficulté que les $(-p)^k$ sont distincts, donc on a trouvé $N+1$ valeurs propres pour M en dimension $N+1$ donc $\boxed{\text{M est diagonalisable.}}$ En notant $\boxed{D = \operatorname{Diag}(1,-p,p^2,\dots,(-p)^k,\dots,(-p)^N)}$, nous obtenons par formule de changement de base l'existence d'une matrice inversible $P \in \mathfrak{M}_{N+1,N+1}(\mathbf{R})$ telle que :

$$M = PDP^{-1}.$$

2.5) Soit $j \in \{0,\dots,N\}$, calculons $\sum_{i=0}^{N} q_{i,j}$. Alors :

$$\sum_{i=0}^{N} q_{i,j} = \sum_{i=0}^{N}\binom{N-j}{i}p^i(1-p)^{N-j-i} = \sum_{i=0}^{N-j}\binom{N-j}{i}p^i(1-p)^{N-j-i},$$

puis en utilisant la formule du binôme, on trouve :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N} q_{i,j} = 1.}$$

On vient de montrer que la somme sur les colonnes de M est constante égale à 1, donc les sommes sur les lignes de ${}^{\top}M$ sont égales à 1. Notant $U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, il vient

$${}^{\top}MU = U, \quad \text{donc} \quad 1 \in \operatorname{Spec}({}^{\top}M).$$

Or, M et ${}^{\top}M$ ont même spectre, donc on retrouve que $\boxed{1 \in \operatorname{Spec}(M)}$.

2.6) Notons X un tel vecteur propre, alors $\mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}}(P_0) = X$, or $P_0 = (pX+1)^N = \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}p^iX^i$, donc on a (écriture en colonne) :

$$\boxed{X = \left(\binom{N}{i}p^i\right)_{i=0,\dots,N}}.$$

2.7) Puisque pour tout $k \in \{1,\dots,N\}$, nous avons encore $\left|(-p)^k\right| < 1$, la suite de matrices $(D^n)_n$ converge toujours vers

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0\dots0\\ 0 & 0\dots0\\ 1 & \vdots\quad\vdots\\ 0 & 0\dots0\end{pmatrix}}.$$

Donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = N) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 . . 0 . . 0 \\ 0 . . . . . 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 . . . . . 0 \end{pmatrix} P^{-1} U_0}.$$

En faisant le produit matriciel on montrerait encore qu'il y a extinction presque-sûre du virus.

Partie II — Évolution proportionnelle

3 — Soit A un évènement. Alors $\boxed{\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}}$, par ailleurs :

$$\{\mathbb{1}_A = 1\} = \{\omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A\}.$$

Donc $\boxed{\mathbf{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbf{P}(A)}$, puis $\mathbf{P}(\mathbb{1}_A = 0) = 1 - \mathbf{P}(\mathbb{1}_A = 1) = 1 - \mathbf{P}(A) = \boxed{\mathbf{P}({}^{C}A)}$. Ainsi, par définition de l'espérance on déduit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathbb{1}_A)) = 1\mathbf{P}(A) + 0\mathbf{P}({}^{C}A) = \boxed{\mathbf{P}(A)}.$$

En d'autres termes $\boxed{\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbf{P}(A))}$.

4 — Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ un entier fixé dans toute cette question.

4.1) Montrons que $X_n = (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1}$. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $U_{n-1}(\omega) = 1$, alors $(1 - U_{n-1})(\omega) = 0$, d'après l'énoncé nous avons dans ce cas

$$X_n(\omega) = (1+\alpha)X_{n-1}(\omega) = (1+\alpha)^1(1-\alpha)^0X_{n-1}(\omega).$$

De-même, si $U_{n-1}(\omega) = 0$, alors $(1 - U_{n-1})(\omega) = 1$ donc

$$X_n(\omega) = (1+\alpha)X_{n-1}(\omega) = (1+\alpha)^1(1-\alpha)^0X_{n-1}(\omega).$$

En tout généralité, on a donc établi la formule ci-dessous :

$$\boxed{X_n = (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1}.}$$

4.2) On souhaite trouver dans cette question une relation de récurrence pour la suite des espérances de X_n.

i) La vérification se fait comme précédemment. Soit donc ω tel que $U_{n-1}(\omega) = 1$. Alors :

$$\left((1+\alpha)X_{n-1}\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=1\}} + (1-\alpha)X_{n-1}\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=0\}}\right)(\omega) = (1+\alpha)X_{n-1}(\omega) + 0 = X_n(\omega)$$

d'après la question précédente. De-même, on vérifie la formule pour les ω tels que $U_{n-1}(\omega) = 0$. Ainsi nous avons établi l'égalité suivante :

$$\boxed{X_n = (1+\alpha)X_{n-1}\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=1\}} + (1-\alpha)X_{n-1}\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=0\}}}.$$

ii) On cherche à prendre l'espérance dans l'égalité précédente. Puisque X_{n-1} a une espérance (admis dans l'énoncé), que $\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=0\}}, \mathbb{1}_{\{U_{n-1}=1\}}$ admet aussi une espérance (univers-image fini) et que X_{n-1} est indépendante de $\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=0\}}, \mathbb{1}_{\{U_{n-1}=1\}}$, alors X_n admet une espérance en tant que somme de telles variables, de plus elle vaut :

$$\mathbf{E}(X_n) = (1+\alpha)\mathbf{E}(X_{n-1})\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=1\}}\right) + (1-\alpha)\mathbf{E}(X_{n-1})\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=0\}}\right).$$

Or, $\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=1\}}\right) = \mathbf{P}(U_{n-1} = 1) = p$, $\quad \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\{U_{n-1}=0\}}\right) = \mathbf{P}(U_{n-1} = 0) = 1 - p$, on trouve

$$\mathbf{E}(X_n) = ((1+\alpha)p + (1-\alpha)(1-p))\mathbf{E}(X_{n-1}),$$

d'où en développant :

$$\boxed{\mathbf{E}(X_n) = (1 + (2p-1)\alpha)\mathbf{E}(X_{n-1}).}$$

iii) La suite $(\mathbf{E}(X_n))_n$ est une suite géométrique de raison $1 + (2p-1)\alpha$ donc on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \boxed{\mathbf{E}(X_n) = (1 + (2p-1)\alpha)^n\mathbf{E}(X_0)}.$$

4.3) Si $1+(2p-1)\alpha > 1 \iff 2p-1>0 \iff \boxed{p > \frac{1}{2}}$ puisque α est positive, nous avons alors $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) = \infty$.

4.4) Rappelons que pour tout $q \in \mathbf{R}$ alors (q^n) est bornée si et seulement si $q \in [-1,1]$. Donc :

$$\text{le modèle est admissible} \iff -1 \leqslant 1+(2p-1)\alpha \leqslant 1.$$

Ceci est équivalent à $\boxed{p \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2}\right]}$.

5 — On pose dans la suite $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k$.

5.1) D'après le cours, puisqu'il s'agit d'une somme de variables aléatoires de loi $\mathscr{B}(p)$, nous avons $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$.

5.2) Vérifions cette formule par récurrence sur n. Pour $n=1$: puisque $S_1 = U_0, 1-S_1 = 1-U_0$, la formule découle des questions précédentes. Supposons-là vraie au rang $n-1$. Alors

$$\begin{aligned}
X_n &= (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1} \\
&= (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}(1+\alpha)^{S_{n-1}}(1-\alpha)^{n-1-S_{n-1}}X_0 \quad \textit{hypothèse de récurrence} \\
&= (1+\alpha)^{U_{n-1}+S_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}+n-1-S_{n-1}}X_0 \\
&= (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}X_0.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\boxed{X_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}X_0.}$$

5.3) On note $f : x \longmapsto (1+\alpha)^x$ et $g : x \longmapsto (1-\alpha)^x$. Elles sont définies par leur forme exponentielle $f(x) = \exp(x\ln(1+\alpha))$ et $g(x) = \exp(x\ln(1+\alpha))$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ puisque $\alpha \in]0,1[$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g =]0,1[}$. Elles sont dérivables en tant que composée de telles fonctions, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on déduit alors

$$f'(x) = \ln(1+\alpha)\exp(x\ln(1+\alpha)) > 0, g'(x) = \ln(1-\alpha)\exp(x\ln(1+\alpha)) < 0$$

donc

$$f \text{ est croissante, et } g \text{ est décroissante.}$$

5.4) Quelle est, en fonction de X_0, la valeur maximale notée M_n que peut prendre X_n ? Nous avons

$$X_n = f(S_n)g(n-S_n)X_0.$$

Or, $0 \leqslant S_n \leqslant (n-1+1)\times 1 = n$ et $0 \leqslant n - S_n \leqslant n$, donc

$$X_n \leqslant f(n)g(0)X_0 = f(n)\boxed{= (1+\alpha)^n X_0 = M_n.}$$

5.5) Si $X_0 > 0$, on a alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty}$ puisque $1+\alpha > 1$.
Le résultat précédent semble empêcher la possibilité que le modèle proposé soit admissible. Néanmoins, ce maximum M_n n'est atteint que s'il y a eu contamination en chaque étape. Si p est faible et n grand, la probabilité d'avoir une telle séquence est faible. On peut le montrer mathématiquement.