CONCOURS BLANC — DEVOIR S. # 4

le Mercredi 06/01/2021, 8h $\longrightarrow$ 12h

Épreuve de format ENS.

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Problème 1 ***ENS 2017*** (Solution : 4) Soit $r \in]0,+\infty[$, un nombre réel fixé. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{R}'(t) = \mathrm{R}(t),$$

où $\mathrm{R} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ satisfaisant $\mathrm{R}(0) = r$, ainsi qu'une fonction continue $\mathrm{A} : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ satisfaisant $\mathrm{A}(0) = 2$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, vérifiant

$$\forall t \in]0,+\infty[\quad \mathrm{A}'(t) = \frac{-\mathrm{A}(t)\mathrm{R}(t)}{\mathrm{A}(t)+1}.$$

1 — Déterminer $\mathrm{R}(t)$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{R}(s)\,\mathrm{d}s$.

2 — Trouver une primitive de $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ sur $]0,\infty[$. Étant donnée une fonction $\mathrm{B} :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$, en déduire une primitive de la fonction

$$t \longmapsto \left(1 + \frac{1}{\mathrm{B}(t)}\right)\mathrm{B}'(t).$$

3 — En remarquant que

$$\int_0^t \left(1 + \frac{1}{\mathrm{A}(s)}\right)\mathrm{A}'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_0^t \mathrm{R}(s)\,\mathrm{d}s$$

et en utilisant la question précédente, exprimer t en fonction $\mathrm{A}(t)$ et de r. On

définie $\tau(r) \in]0,+\infty[$ par l'égalité $\mathrm{A}(\tau(r)) = 1$. Donner une formule explicite pour $\tau(r)$ en fonction de r.

4 — Montrer que la fonction $r \longmapsto \tau(r)$ est monotone sur $]0,+\infty[$ et décrire son image $\tau(]0,+\infty[)$.

5 — On considère une fonction continue $\mathrm{S} : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$, dérivable sur $]0,\tau(r)[\cup]\tau(r),+\infty[$ qui vérifie $\mathrm{S}(0) = 1-r$ ainsi que les équations différentielles

$$\begin{aligned} \mathrm{S}'(t) &= -\mathrm{S}(t) \quad \text{si } t \in]0,\tau(r)[\\ \mathrm{S}'(t) &= 2\mathrm{S}(t) \quad \text{si } t \in]\tau(r),+\infty[. \end{aligned}$$

Donner une formule explicite pour $\mathrm{S}(t)$ si $t \in]0,\tau(r)[$, en déduire $\mathrm{S}(\tau(r))$, puis une formule explicite pour $\mathrm{S}(t)$ pour $t \in]\tau(r),+\infty[$.

On cherche à déterminer $r \neq 1$ et $\mathrm{T} > 0$ tels que :

$$\textbf{(H)} \quad \mathrm{R}(\mathrm{T}) + \mathrm{S}(\mathrm{T}) = 10 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{R}(0)}{\mathrm{R}(0)+\mathrm{S}(0)} = \frac{\mathrm{R}(\mathrm{T})}{\mathrm{R}(\mathrm{T})+\mathrm{S}(\mathrm{T})}.$$

On suppose que $r \in]0,\infty[\setminus\{1\}$ à partir de maintenant.

6 — Montrer :

$$\frac{\mathrm{R}(0)}{\mathrm{R}(0)+\mathrm{S}(0)} = \frac{\mathrm{R}(\mathrm{T})}{\mathrm{R}(\mathrm{T})+\mathrm{S}(\mathrm{T})} \implies \frac{\mathrm{R}(\mathrm{T})}{\mathrm{R}(0)} = \frac{\mathrm{S}(\mathrm{T})}{\mathrm{S}(0)} = \frac{\mathrm{R}(\mathrm{T})+\mathrm{S}(\mathrm{T})}{\mathrm{R}(0)+\mathrm{S}(0)}.$$

7 — Montrer que : **(H)** $\implies$ $T > \tau(r)$.

8 — Sous les hypothèses **(H)** , écrire, à l'aide des questions 3, 5 et 7, des formules explicites pour $\frac{R(T)}{R(0)}$ et $\frac{S(T)}{S(0)}$, puis, grâce à **(H)** , une formule pour $\frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)}$.

9 — En déduire des valeurs explicites pour T puis pour $\tau(r)$. Expliciter r en utilisant ces valeurs et la question 3.

10 — Vérifier que les valeurs T, r et $\tau(r)$ calculées à la question 9 satisfont effectivement les hypothèses **(H)** .

Problème 2 ***ENS 2019 – Un problème d'optimisation sur les matrices bistochastiques*** (Solution : 6) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé, et soit $[\![1\,,\,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.

On appelle permutation de $[\![1\,,\,n]\!]$ toute bijection de $[\![1\,,\,n]\!]$ sur $[\![1\,,\,n]\!]$, et on définit la matrice d'une permutation p de $[\![1\,,\,n]\!]$ comme la matrice M à n lignes et n colonnes de coefficients M_{ij} tels que $M_{ij} = 1$ si $j = p(i)$ et $M_{ij} = 0$ sinon, où $i \in [\![1\,,\,n]\!]$ est l'indice de ligne et $j \in [\![1\,,\,n]\!]$ est l'indice de colonne.

On appelle matrice *bistochastique* de taille (n,n) une matrice à n lignes et n colonnes de coefficients M_{ij} positifs tels que $\sum_{j=1}^{n} M_{ij} = 1$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 1$ pour tout j. Ainsi, la somme sur toutes les lignes et toutes les colonnes sont constantes égales à 1.

Soit alors les $2n$ nombres réels $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ et $y_1 \leq \cdots \leq y_n$. Dans cette partie on se propose de minimiser la quantité

$$C(M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_i)^2 M_{ij},$$

parmi les matrices bistochastiques M de taille (n,n) et de coefficients M_{ij}.

1 — ***(Question préliminaire)*** Montrer qu'une matrice de permutation est une matrice bistochastique.

2 — ***(Question préliminaire)*** Soit les $2n$ nombres réels $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_n$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i.c_i = b_1.\sum_{j=1}^{n} c_j + \sum_{i=2}^{n} (b_i - b_{i-1}) \sum_{j=i}^{n} c_j$$

3 — ***(Exemple)*** Dans cette question uniquement n est égal à 3.

3.1) Déterminer toutes les permutations de $\{1,2,3\}$ et écrire leurs matrices.

3.2) Soit les nombres $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 4$. Calculer la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} (y_{p(i)} - x_i)^2$$

pour chaque permutation p de $\{1,2,3\}$ et déterminer la ou les permutations rendant minimale cette quantité.

4 — ***(Exemple)*** Dans cette question uniquement n est égal à 2, et on considère les nombres $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 1$ et $y_2 = 4$.

4.1) Étant donné un réel $r \in [0,1]$, calculer C(M) pour la matrice bistochastique

$$M = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ r & 1-r \end{pmatrix}$$

4.2) Montrer que, parmi les matrices bistochastiques M de taille $(2,2)$, la matrice identité est l'unique matrice rendant minimale la quantité C(M).

5 — ***(Matrices de permutation)***

5.1) Soit p une permutation de $[\![1\,,\,n]\!]$. Montrer que

$$\sum_{j=i}^{n} y_{p(j)} \leq \sum_{j=i}^{n} y_j$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$, avec de plus égalité pour $i = 1$. En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n} (y_{p(i)} - x_i)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2.$$

On pourra développer les carrés et utiliser la question 2

5.2) Montrer que, parmi les matrices de permutation M, la matrice identité rend minimale la quantité C(M).

6 — ***(Matrices bistochastiques symétriques)***

6.1) Montrer que

$$x_i.y_i + x_j.y_j \geq x_i.y_j + x_j.y_i$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.

6.2) En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_i)^2.\mathrm{M}_{ij} \geq \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2$$

pour toute matrice bistochastique symétrique M de taille (n, n).

6.3) Montrer que, parmi les matrices bistochastiques symétriques M de taille (n, n), la matrice identité rend minimale la quantité C(M).

7 — ***(Cas général)***

7.1) Soit M une matrice bistochastique de taille (n, n). Montrer que

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}_{jk}.y_k \leq \sum_{j=i}^{n} y_j$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. *Pour* $i \geq 2$, *on pourra montrer que*

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\mathrm{M}_{jk}.y_k \leq \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\mathrm{M}_{kj}.y_j$$

En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_i)^2.\mathrm{M}_{ij} \geq \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2$$

7.2) Montrer que, parmi les matrices bistochastiques M de taille (n, n), la matrice identité rend minimale la quantité C(M).

Si de plus $x_1 < \cdots < x_n$ *et* $y_1 < \cdots < y_n$, *on peut montrer que, parmi les matrices bistochastiques* M *de taille* (n, n), *la matrice identité est l'unique matrice rendant minimale la quantité* C(M).

CORRECTION

Solution (problème 1) (Énoncé : 1)

1 — D'après le cours nous avons $\boxed{R(t) = R(0)e^t = re^t}$ pour tout $t \in]0,\infty[$. On peut alors calculer

$$\int_0^1 R(s)\,ds = \int_0^1 (re^s)\,ds = \boxed{r(e-1)}.$$

2 — Une primitive de $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ sur $]0,\infty[$ s'obtient en primitivant chacun des termes. C'est donc par exemple $\boxed{x \longmapsto x + \ln x}$ si $x \in]0,\infty[$
Soit B :$]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$, alors on reconnaît dans la formule

$$t \longmapsto \left(1 + \frac{1}{B(t)}\right) B'(t)$$

une dérivée de composée. Plus précisément, la fonction suivante est bien définie puis B est strictement positive, et est une primitive de la fonction cherchée :

$$\boxed{t \in]0,+\infty[\longmapsto B(t) + \ln B(t)}.$$

3 — Commençons par montrer la remarque

$$\int_0^t \left(1 + \frac{1}{A(s)}\right) A'(s)\,ds = -\int_0^t (A(s)+1)\,\frac{R(s)}{A(s)+1}\,ds$$
$$= \boxed{-\int_0^t R(s)\,ds.}$$

et en utilisant la question précédente, on peut alors primitiver le membre de gauche, puisque A est également de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement positive.

$$\int_0^t \left(1 + \frac{1}{A(s)}\right) A'(s)\,ds = [A(s) + \ln A(s)]_0^t$$
$$= A(t) + \ln A(t) - A(0) - \ln A(0)$$
$$= A(t) + \ln A(t) - 2 - \ln 2.$$

D'autre part,

$$\int_0^t R(s)\,ds = r(e^t - 1).$$

Ainsi,

$$A(t) + \ln A(t) - 2 - \ln 2 = r(1 - e^t).$$

Il suffit ensuite d'isoler t :

$$\boxed{t = \ln\left(1 - \frac{1}{r}(A(t) + \ln A(t) - 2 - \ln 2)\right)}.$$

On obtient alors une expression pour $\tau(r)$ en remplaçant $A(\tau(r))$ par 1 :

$$\boxed{\tau(r) = \ln\left(1 + \frac{1}{r}(1 + \ln 2)\right)}.$$

4 — La fonction $r \in]0,\infty[\longmapsto \frac{1}{r}$ est décroissante, donc comme $1 + \ln \geqslant 0$ et que ln est croissante, la fonction $\boxed{r \longmapsto \tau(r) \text{ est décroissante}}$ donc *a fortiori* monotone.
Donc puisqu'elle est de plus continue en tant que somme et produit de telles fonctions, on obtient :

$$\tau(]0,+\infty[) = \left]\lim_{r\to\infty} \tau(r), \lim_{r\to 0} \tau(r)\right[= \boxed{]0,\infty[}.$$

5 — Commençons par résoudre l'équation différentielle $S'(t) = -S(t)$ pour $t \in\in]0,\tau(r)[$. D'après le cours, pour tout $t \in]0,\tau(r)[$,

$$S(t) = Ke^{-t}$$

avec $K \in \mathbf{R}$. Mais S est supposée continue sur $[0,\tau(r)[$, donc

$$S(t) \xrightarrow{t\to 0} S(0) = 1 - r.$$

Mais par ailleurs $Ke^{-t} \xrightarrow{t\to 0} K$, donc $K = 1 - r$ et finalement

$$\forall t \in]0,\tau(r)[, \quad \boxed{S(t) = (1-r)e^{-t}}.$$

De plus, la fonction S est continue en $\tau(r)$, donc

$$(1-r)e^{-t} \xrightarrow{t\to\tau(r)} (1-r)e^{-\tau(r)}.$$

Ainsi, $\boxed{S(\tau(r)) = (1-r)e^{-\tau(r)}}$.
Sur l'intervalle $]\tau(r),\infty[$, on fait de-même : il existe une constante $L \in \mathbf{R}$ telle que pour tout $t \in]\tau(r),\infty[$,

$$Le^{2t},$$

puis par continuité en $\tau(r)$:

$$Le^{2\tau(r)} = (1-r)e^{-\tau(r)} \quad\Longleftrightarrow\quad L = (1-r)e^{-3\tau(r)}.$$

D'où :

$$\forall t \in]\tau(r),\infty[, \quad \boxed{S(t) = (1-r)e^{2t-3\tau(r)}}.$$

6 — Supposons que $\frac{R(0)}{R(0)+S(0)} = \frac{R(T)}{R(T)+S(T)}$. Alors en multipliant par $R(T)+S(T)$ puis en divisant par $R(0)$, on obtient :

$$\frac{R(T)}{R(0)} = \frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)}.$$

On peut également faire un produit en croix dans l'hypothèse. On a :

$$R(0)(R(T)+S(T)) = R(T)(R(0)+S(0)).$$

Après simplifications, on trouve

$$R(0)S(T) = R(T)S(0),$$

ce qui, puisque $S(0) = 1-r \neq 0$, implique

$$\frac{R(T)}{R(0)} = \frac{S(T)}{S(0)}.$$

Donc

$$\boxed{\frac{R(0)}{R(0)+S(0)} = \frac{R(T)}{R(T)+S(T)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{R(T)}{R(0)} = \frac{S(T)}{S(0)} = \frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)}}.$$

7 — Supposons **(H)** et raisonnons par l'absurde en supposant que $T \leqslant \tau(r)$. Alors les questions précédentes nous invitent à analyser le quotient $S(T)/S(0)$. En effet, si $T \leqslant \tau(r)$, alors :

$$\frac{S(T)}{S(0)} = \frac{(1-r)e^{-T}}{1-r} = e^{-T} \leqslant 1,$$

mais par ailleurs, d'après **(H)** :

$$\frac{S(T)}{S(0)} = \frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)} = \frac{10}{r+1-r} == 10 \geqslant 1$$

donc \(T > \tau(r) \).

8 — Supposons **(H)**. Comme $T > \tau(r)$, nous avons

$$S(T) = (1-r)e^{2T-3\tau(r)}, \quad S(0) = 1-r$$

et $R(T) = re^{T}, \quad R(0) = r$. Donc

$$\frac{R(T)}{R(0)} = \boxed{e^{T}}, \quad \frac{S(T)}{S(0)} = \frac{(1-r)e^{2T-3\tau(r)}}{1-r} = \boxed{e^{2T-3\tau(r)}}.$$

Grâce à **(H)**, on a la succession d'égalités ci-après :

$$\boxed{\frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)} = \frac{10}{1} = e^{T} = e^{2T-3\tau(r)}}.$$

9 — On obtient alors : $\boxed{T = \ln 10}$, puis

$$10 = e^{2\ln 10 - 3\tau(r)} \quad\Longleftrightarrow\quad 10 = \frac{100}{e^{3\tau(r)}}.$$

Soit alors

$$e^{3\tau(r)} = 10 \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\tau(r) = \frac{\ln 10}{3}}.$$

Mais en utilisant la 3ème question, on a

$$\frac{\ln 10}{3} = \ln\left(1 + \frac{1}{r}(1+\ln 2)\right),$$

soit $\boxed{r = \frac{1+\ln 2}{10^{1/3}-1}}$.

10 — Jusque maintenant, nous avons montré que si r, T existent, alors elles valent forcément $r = \frac{1+\ln 2}{10^{1/3}-1}$ et $\mathrm{T} = \ln 10$. Inversement, montrons que ces valeurs satisfont les propriétés suivantes :

$$\mathrm{R(T)} + \mathrm{S(T)} = 10, \qquad \frac{\mathrm{R}(0)}{\mathrm{R}(0)+\mathrm{S}(0)} = \frac{\mathrm{R(T)}}{\mathrm{R(T)}+\mathrm{S(T)}}, \qquad r \neq 1, \mathrm{T} > 0.$$

Premièrement, $r = 1$ si et seulement si $\ln 2 = 10^3 - 2$ ce qui est absurde et donc $r \neq 1$, on a évidemment aussi $r > 0$ et $\mathrm{T} > 0$. En utilisant les expressions trouvées pour R, S, on déduit :

$$\mathrm{R(T)} + \mathrm{S(T)} = r\mathrm{e}^{\ln 10} + (1-r)\mathrm{e}^{2\ln 10 - 3\frac{1}{3}\ln(10)} = \mathrm{e}^{\ln 10} = 10,$$
$$\frac{\mathrm{R}(0)}{\mathrm{R}(0)+\mathrm{S}(0)} = r = \frac{r\mathrm{e}^{\ln 10}}{10} = \frac{\mathrm{R(T)}}{\mathrm{R(T)}+\mathrm{S(T)}}.$$

donc $\boxed{\text{les valeurs trouvées conviennent.}}$

Solution (problème 2) (Énoncé : 2)

1 — *(Question préliminaire)* Soit M une matrice de permutation associée à la permutation p de $[\![1\,,\,n]\!]$. Les coefficients M_{ij} valent 0 ou 1, ils sont donc positifs. On remarque que pour une telle matrice, sur chaque ligne, *resp.* chaque colonne, il n'y a qu'un seul 1, le reste étant des zéros. La somme des coefficients de M sur une ligne, *resp.* une colonne vaut donc 1 et $\boxed{\text{M est bistochastique.}}$

2 — Soient les $2n$ nombres réels $b_1, \dots, b_n$, $c_1, \dots, c_n$. On a, en notant $\mathrm{C}_i = \sum_{j=i}^n c_j$, que $c_i = \mathrm{C}_i - \mathrm{C}_{i+1}$ (on pose $\mathrm{C}_{n+1} = 0$). Il vient donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n b_i.c_i &= \sum_{i=1}^n b_i.(\mathrm{C}_i - \mathrm{C}_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^n b_i.\mathrm{C}_i - \sum_{i=1}^n b_i.\mathrm{C}_{i+1} && \textit{linéarité de la somme} \\
&= b_1.\mathrm{C}_1 + \sum_{i=2}^n b_i.\mathrm{C}_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i.\mathrm{C}_{i+1} \\
&= b_1.\mathrm{C}_1 + \sum_{i=2}^n b_i.\mathrm{C}_i - \sum_{i'=2}^{n} b_{i'-1}.\mathrm{C}_{i'} && \textit{changement d'indice} \\
&= b_1.\mathrm{C}_1 + \sum_{i=2}^n (b_i - b_{i-1}).\mathrm{C}_i.
\end{aligned}$$

Ce qui, vu la définition de C_i, est l'identité attendue :

$$\boxed{\sum_{i=1}^n b_i.c_i = b_1.\sum_{j=1}^n c_j + \sum_{i=2}^n (b_i - b_{i-1}) \sum_{j=i}^n c_j.}$$

3 — *(Exemple)* Dans cette question uniquement n est égal à 3.

3.1) Il y a $6 = 3!$ permutations de $\{1,2,3\}$ dont les matrices sont

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{T}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{T}_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_{3,2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

par exemple pour $\mathrm{T}_{1,2}$: la bijection est la suivante $1 \longmapsto 2, 2 \longmapsto 1, 3 \longmapsto 3$ — on regarde simplement où se trouve le 1 dans chaque colonne.

3.2) Soient les nombres $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 4$. On calcule la quantité

$$\sum_{i=1}^n (y_{p(i)} - x_i)^2$$

pour chaque permutation p de $\{1,2,3\}$ en plaçant le résultat dans un tableau

p	$\sum_{i=1}^{n}(y_{p(i)}-x_i)^2$	valeur
I_3	$(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2$	$0^2+0^2+2^2=4$
$T_{1,2}$	$(y_2-x_1)^2+(y_1-x_2)^2+(y_3-x_3)^2$	$1^2+1^2+2^2=6$
$T_{1,3}$	$(y_3-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_1-x_3)^2$	$4^2+0^2+2^2=20$
$T_{2,3}$	$(y_1-x_1)^2+(y_3-x_2)^2+(y_2-x_3)^2$	$0^2+3^2+1^2=10$
$C_{1,2,3}$	$(y_2-x_1)^2+(y_3-x_2)^2+(y_1-x_3)^2$	$1^2+3^2+2^2=14$
$C_{3,2,1}$	$(y_3-x_1)^2+(y_1-x_2)^2+(y_2-x_3)^2$	$4^2+1^2+1^2=18$

La permutation I_3, identité de $\{1,2,3\}$, et elle seule, rend minimale cette quantité.

4 — *(Exemple)* Dans cette question uniquement n est égal à 2, et on considère les nombres $x_1=0$, $x_2=1$, $y_1=1$ et $y_2=4$.

4.1) Étant donné un réel $r\in[0,1]$, la matrice

$$M_r=\begin{pmatrix}1-r & r\\ r & 1-r\end{pmatrix}$$

est effectivement bistochastique. On a

$$C(M_r)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}(y_j-x_i)M_{ij}=(1-r).((y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2)+r.((y_2-x_1)^2+(y_1-x_2)^2)$$

La fonction $r\mapsto C(M_r)$ est donc affine sur $[0,1]$, elle atteint son minimum à l'une des extrémités de ce segment. On a

$$C(M_0)=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2,\ C(M_1)=(y_2-x_1)^2+(y_1-x_2)^2$$

On peut voir que, avec les valeurs numériques proposées, $C(M_0)=10$ et $C(M_1)=16$ et donc que le minimum de $C(M_r)$ lorsque r varie sur $[0,1]$ est uniquement atteint en $r=0$ et vaut $\boxed{C(M_0)=10.}$

4.2) Soit M une matrice bistochastique de taille $(2,2)$. Posons $r=M_{12}$. On a $r\in[0,1]$ et, comme

$$M_{11}+M_{12}=1 \quad\text{et}\quad M_{12}+M_{22}=1$$

On a

$$M_{11}=M_{22}=1-r$$

et finalement, comme $M_{21}+M_{11}=1$, il vient que $M=M_r$ pour le r précisé *supra*.
En d'autres termes toute matrice bistochastique $(2,2)$ est une matrice M_r pour un certain $r\in[0,1]$ et réciproquement.
Donc, sur l'exemple numérique, d'après la question précédente, parmi les matrices bistochastiques M de taille $(2,2)$, *i.e.* parmi les matrices M_r, $r\in[0,1]$, la matrice identité $I_2=M_0$ est effectivement l'unique matrice rendant minimale la quantité $C(M)$.

5 — *(Matrices de permutation)*

5.1) Soit p une permutation de $[\![1\,,\,n]\!]$. Du fait que p est bijective, on a

$$\{p(j),\ j\in[\![1\,,\,n]\!]\}=[\![1\,,\,n]\!]$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{n}y_{p(j)}=\sum_{j=1}^{n}y_j$$

Soit $i\in[\![1\,,\,n]\!]$, l'inégalité demandée

$$\sum_{j=i}^{n}y_{p(j)}\leq\sum_{j=i}^{n}y_j$$

s'explique intuitivement par le fait que les y_j sont rangés par ordre croissant et donc que la somme sur les $n-i+1$ derniers termes de cette suite est supérieure à toute somme sur $n-i+1$ termes d'indices distincts de cette suite.
Montrons ceci de manière plus formelle à l'aide d'une récurrence sur $n\in\mathbf{N}$.

Initialisation. Pour $n=1$. Alors on a $y_{p(1)} \leqslant y_1$ puisque $p(1)=1$ dans ce cas.

Hérédité. Supposons-là vraie au rang n, *i.e.* pour un nombre n de points dans la suite (y_n), et montrons-là au rang $n+1$.

$$\sum_{j=i}^{n+1} y_{p(j)} = \sum_{j=i}^{n} y_{p(j)} + y_{p(n+1)}.$$

Deux cas se présentent alors :

- si $p(n+1)=n+1$. Alors dans ce cas nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à $y_1,\dots,y_n$. On a alors :

$$\sum_{j=i}^{n+1} y_{p(j)} = y_{p(n+1)} + \sum_{j=i}^{n} y_{p(j)} \leqslant \sum_{j=i}^{n} y_j + y_{p(n+1)} = \sum_{j=i}^{n+1} y_j.$$

- Sinon $p(n+1)\in \{1,\dots,n\}$, et il existe $j_{n+1}\in\{1,\dots,n\}$ tel que $p(j_{n+1})=n+1$. Donc :

$$\sum_{j=i}^{n+1} y_{p(j)} = y_{p(j_{n+1})} + \sum_{j=i, j\neq j_{n+1}}^{n+1} y_{p(j)}.$$

Donc

$$\sum_{j=i}^{n+1} y_{p(j)} = y_{n+1} + \sum_{j=i, j\neq j_{n+1}}^{n+1} y_{p(j)}.$$

Puisque pour tout $j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{j_{n+1}\}$, nous avons $y_{p(j)}\in[\![1\,,\,n]\!]$, nous pouvons encore appliquer l'hypothèse de récurrence, cette-fois à la suite $y_1,\dots,y_n$ (puisque dans la suite $y_{p(i)},\dots,y_{p(n)}$ nous avons exclu y_{n+1}), et il vient

$$\sum_{j=i}^{n+1} y_{p(j)} \leqslant y_{n+1} + \sum_{j=i}^{n} y_j = \sum_{j=i}^{n+1} y_j.$$

D'où la propriété par principe de récurrence. Ceci étant, on a

$$\sum_{i=1}^{n} (y_{p(i)}-x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_{p(i)}^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_{p(i)}$$

Transformons le terme $\sum_{i=1}^{n} x_i.y_{p(i)}$ en utilisant la question 1.2. On a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i.y_{p(i)} = x_1.\sum_{i=1}^{n} y_{p(i)} + \sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1}).\sum_{j=i}^{n} y_{p(j)}$$

et donc, en utilisant le fait que $x_i-x_{i-1}\geq 0$ et le fait que $\sum_{i=1}^{n} y_{p(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i.y_{p(i)} = x_1.\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1}).\sum_{j=i}^{n} y_{p(j)} \leq x_1.\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1}).\sum_{j=i}^{n} y_j$$

En réutilisant la question 1.2 pour transformer cette dernière somme, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} x_i.y_{p(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i$$

On a donc $(-2<0)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (y_{p(i)}-x_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_{p(i)}^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_{p(i)}\\ &\geq \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i\\ &= \boxed{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}.\end{aligned}$$

5.2) Si M est une matrice de permutation associée à la permutation p de $[\![1\,,\,n]\!]$, on a

$$\mathrm{C(M)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_i)^2.\mathrm{M}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j \text{ t.q. } j=p(i)}^{n}(y_j-x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_{p(i)}-x_i)^2$$

Le résultat précédent s'exprime donc par le fait que pour toute matrice de permutation M, on a

$$\mathrm{C(M)} \geq \mathrm{C(I}_n) = \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2.$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n, car I_n est effectivement une matrice de permutation.

Ceci montre que, parmi les matrices de permutation M, la matrice identité rend minimale la quantité C(M).

6 — *(Matrices bistochastiques symétriques)*

6.1) Soient $i, j \in [\![1\,,\,n]\!]$, on a

$$x_i.y_i + x_j.y_j - (x_i.y_j + x_j.y_i) = x_i.(y_i - y_j) + x_j.(y_j - y_i) = (x_i - x_j).(y_i - y_j)$$

Comme les suites x et y sont croissantes, $(x_i - x_j).(y_i - y_j)$ est du même signe (au sens large) que $(i - j).(i - j) = (i - j)^2 \geq 0$ et donc

$$x_i.y_i + x_j.y_j \geq x_i.y_j + x_j.y_i$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.

6.2) On a, pour M matrice bistochastique symétrique, que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_i)^2.\mathrm{M}_{ij} && \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j^2 + x_i^2 - 2y_j.x_i).\mathrm{M}_{ij} && \textit{développement du carré}\\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j^2(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_{ij}) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.x_i.\mathrm{M}_{ij} && \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.x_i.\mathrm{M}_{ij} && \text{M } \textit{bistochastique}\\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_j.x_i.\mathrm{M}_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.x_j.\mathrm{M}_{ji} && \textit{échange } i \leftrightarrow j \textit{ dans une somme}\\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (y_j.x_i + y_i.x_j).\mathrm{M}_{ij} && \text{M } \textit{symétrique}\\
&\geq \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (y_i.x_i + y_j.x_j).\mathrm{M}_{ij} && \textit{ineg. préc., } \mathrm{M}_{ij} \geq 0\\
&\geq \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_j.x_j.\mathrm{M}_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i.x_i.\mathrm{M}_{ij} && \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{j=1}^{n} y_j.x_j - \sum_{i=1}^{n} y_i.x_i && \text{M } \textit{bistochastique}\\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + x_i^2 - y_i.x_i - y_i.x_i) && \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2. &&
\end{aligned}$$

Et donc, en résumé,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_i)^2.\mathrm{M}_{ij} \geq \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2.}$$

lorsque M est une matrice bistochastique symétrique de taille (n, n).

6.3) Il faut noter que l'inégalité précédente se réécrit

$$\mathrm{C(M)} \geq \mathrm{C}(\mathrm{I}_n)$$

et donc, parmi les matrices bistochastiques symétriques M de taille (n, n), la matrice identité rend minimale la quantité C(M).

7 — *(Cas général)*

7.1) Soit M une matrice bistochastique de taille (n, n). On pose, pour $i \in [\![1\,,\,n]\!]$,

$$\Delta_i = \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\mathrm{M}_{jk}.y_k - \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\mathrm{M}_{kj}.y_j$$

(Pour prouver l'indication, il s'agit de démontrer que $\Delta_i \leq 0$.)

- Pour $i = 1$, on a, par convention,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}_{jk}.y_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_{jk}.y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

  et

$$\Delta_1 = 0.$$

- Pour $i \geq 2$, on a, car la suite y est croissante (et donc $y_k \leq y_i$ si $k \leq i$) et les coefficients $\mathrm{M}_{ik} \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\Delta_i &\leq \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\mathrm{M}_{jk}.y_i - \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\mathrm{M}_{kj}.y_i\\
&= y_i\left(\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\mathrm{M}_{jk} - \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\mathrm{M}_{kj}.\right)\\
&= y_i.\Delta_i^1,
\end{aligned}$$

  où Δ_i^1 désigne le terme entre parenthèses.

Montrons que Δ_i^1 est nul.

$$\begin{aligned}
\Delta_i^1 &= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}(M_{jk}-M_{kj}) & \\
&& \textit{M bistochastique}\\
&= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n}(M_{jk}-M_{kj}) & \\
&& \textit{M bistochastique}\\
&= \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=i}^{n}(M_{jk}-M_{kj}) & \\
&& \textit{permut. } i \leftrightarrow j\\
&= \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{j=i}^{n}(M_{kj}-M_{jk}) & \\
&& \textit{sommes doubles finies à permuter}\\
&= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}(M_{kj}-M_{jk}) = -\Delta_i^1. &
\end{aligned}$$

Donc $\Delta_i^1 = 0$ et l'indication est montrée :

$$\forall i \geqslant 2,\quad \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk}.y_k \leq \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj}.y_j.$$

En reprenant le calcul du cas symétrique, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_i)^2 M_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j^2+x_i^2-2y_j.x_i).M_{ij}\\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j^2(\sum_{i=1}^{n} M_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2(\sum_{j=1}^{n} M_{ij}) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.x_i.M_{ij} \qquad \textit{(M bistochastique}\\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.x_i.M_{ij}.
\end{aligned}$$

Il s'agit, pour conclure, comme dans le cas symétrique, de démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.x_i.M_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n} y_j.x_j$$

Posons, en s'inspirant de 1.2,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.x_i.M_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j.M_{ij}\right)}_{c_i}.\underbrace{x_i}_{b_i}$$

et donc, par 1.2,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.x_i.M_{ij} = x_1.C_1 + \sum_{i=2}^{n}(x_i - x_{i-1}).C_i$$

où

$$C_i = \sum_{k=i}^{n} c_k = \sum_{k=i}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.M_{kj} = \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_k.M_{jk}$$

Comme par la question précédente

$$\begin{cases} C_i = \sum_{j=i}^{n} y_j & \text{si } i = 1\\ C_i = \Delta_i + \sum_{j=i}^{n} y_j & \text{si } i > 1\end{cases}$$

et comme $x_i - x_{i-1} \geq 0$, on a alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.x_i.M_{ij} = x_1.\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1}).\sum_{j=i}^{n} y_j + \sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1}).\Delta_i$$

ce qui, toujours par 1.2, se simplifie en

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j.x_i.M_{ij} = \sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1}).\Delta_i + \sum_{j=1}^{n} x_j.y_j \leq \sum_{j=1}^{n} x_j.y_j$$

avec égalité si et seulement si $\forall i \in [\![2\,,\,n]\!]$, $(x_i - x_{i-1}).\Delta_i = 0$.
Et donc, en résumé,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_i)^2.M_{ij} \geq \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$$

lorsque M est une matrice bistochastique de taille (n,n).

7.2) Il faut noter que l'inégalité précédente se réécrit

$$C(M) \geq C(I_n)$$

et donc,

parmi les matrices bistochastiques M de taille (n,n), la matrice identité rend minimale la quantité C(M).