DEVOIR MAISON # 1

à rendre le Jeudi 10/09/2020

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet <u>est complètement inutile pour tout le monde.</u>

1. ALGÈBRE

Nous allons voir les exercices de base d'Algèbre linéaire de première année concernant les espaces vectoriels, qui n'ont pas pu être fait compte-tenu du confinement.

<u>Les 5/2 peuvent se dispenser de regarder cette partie</u>

> **Rappel** Généralement, pour montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel, on montre que :
> - l'ensemble ne contient pas le vecteur nul,
> - ou qu'il n'est pas stable par somme,
> - ou qu'il n'est pas stable par produit avec un scalaire.
>
> Par exemple, l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ x+y=1\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ puisqu'il ne contient pas le vecteur nul $(0+0=0\neq 1)$.
>
> Plus généralement, dès que l'un des axiome de la définition d'espace vectoriel n'est pas vérifié, alors l'ensemble n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 1 (Solution : ??) Les ensembles ci-dessous, sont-ils, munis de l'addition et la multiplication par un scalaire des vecteurs, des espaces vectoriels ?

1. $\mathrm{E}_1=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2,\ \text{tel que } x=y\right\}$,
2. $\mathrm{E}_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ \text{tel que } x+y+z=0, x-y+z=0\right\}$,
3. $\mathrm{E}_3=(\mathrm{O}x)\cup(\mathrm{O}y)$ dans $\mathbf{R}^2$,
4. l'ensemble E_4 des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre $n\geqslant 1$,
5. $\mathrm{E}_5=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ xy=0\right\}$.

Exercice 2 (Solution : ??) Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\mathscr{L}_1=((1,1,1),(2,2,2))$,
2. $\mathscr{L}_2=((1,0,1),(0,2,2),(3,3,0))$,
3. $\mathscr{L}_3=((-1,-2,2),(4,-3,-2),(2,-1,-1))$.

Exercice 3 (Solution : ??) Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbf{R}^3$?

1. $\mathscr{G}_1=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))$,
2. $\mathscr{G}_2=((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$.

2. ANALYSE

Exercice 4 (Solution : 4) Déterminer les développements limités suivants :

1. à l'ordre 5 en zéro de $x\longmapsto\cos(2x)\sin(x)$,
2. à l'ordre 3 en zéro de $x\longmapsto(1+x)^{\frac{1}{x}}$, *<u>Indication :</u> Penser à la forme exponentielle, d'ailleurs pourquoi ne peut-on pas utiliser le développement de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de zéro ?.*
3. à l'ordre 4 en zéro de $x\longmapsto\frac{x}{\sin x}$ *<u>Indication :</u> Penser au développement limité de $\frac{1}{1-u}$ lorsque u tend vers zéro.*

Exercice 5 ***Une étude locale de fonction*** (Solution : 5) On pose $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$ pour x appartenant au domaine de définition de f.

1 — Déterminer le domaine de définition de f. Écrire un un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de f.

2 — En déduire l'équation de la tangente D de la courbe Γ de f au point d'abscisse 0, préciser la position de Γ par rapport à D, et tracer l'allure de la courbe au voisinage de ce point.

> **Rappel** Considérons $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ avec I un intervalle, et une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in \mathrm{I}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors :
>
> $$\begin{cases} u_n \xrightarrow{n\to\infty} l \in \mathbf{R}, \\ f \quad \text{continue} \end{cases} \implies l = f(l).$$
>
> On dit dans ce cas que l est un *point fixe* de f.
>
> En effet : passons à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$. On obtient :
>
> $$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = l = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(l) \text{ car } f \text{ est continue .}$$

Le rappel précédent pourra servir dans l'exercice qui suit.

Exercice 6 ***Une suite récurrente avec « f » décroissante*** (Solution : 6) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1 — 1.1) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

1.2) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2 — Les scripts suivants renvoient, 5 pour `programme1` et 6 pour `programme2`. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

```python
import math as ma
def programme1():
    u = 1
    n = 0
    while u > 0.00001:
        u = ma.exp(-u)/u
        n += 1
    return n
```

```python
import math as ma
def programme2():
    u = 1
    n = 0
    while u < 100000:
        u = ma.exp(-u)/u
        n += 1
    return n
```

3 — 3.1) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad g(x) = e^{-x} - x^2$$

3.2) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbf{R}_+^*$.

3.3) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de α, en utilisant l'algorithme de dichotomie.

4 — 4.1) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

4.2) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$.

5 — On pose : $h(x) = \begin{cases} (f\circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

5.1) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

5.2) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbf{R}_+$.

5.3) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$.

5.4) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Rappel On rappelle qu'une intégrale de fonction g définie sur un segment $[a,b]$ avec $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ existe bien dès que g est continue.

Passons à présent à un rappel sur les intégrales à bornes variables.

Rappel Considérons une fonction du type $f : x \longrightarrow \int_{u(x)}^{v(x)} g(t)\,\mathrm{d}t$ avec u, v, g trois fonctions, on suppose f définie sur son ensemble de définition (qui dépend de celui de u, v, g ...). On suppose g continue.

Pour étudier une telle fonction, l'idée est de travailler avec la forme ci-dessous. Pour tout x dans l'ensemble de définition de f, on a

$$f(x) = \mathrm{G}\circ v(x) - \mathrm{G}\circ u(x), \quad \mathrm{G} \text{ primitive de } g.$$

Cette forme nous permet facilement d'étudier f (par exemple il est aisé de dériver cette expression, ou encore d'étudier la limite en un point).

Exercice 7 ***Une fonction définie par une intégrale*** (Solution : 8) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t)^2}$$

pour x dans le domaine de définition de g. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $g(x)$ de deux manières différentes.

1 — ***(Première méthode : Étude de fonction)***

1.1) Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur $]0,\infty[$, et calculer sa dérivée.

1.2) En déduire la valeur de $g(x)$, pour tout $x\in]0,\infty[$.

2 — ***(Seconde méthode : Décomposition en éléments simples)***

2.1) Montrer qu'il existe $(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$ tels que : $\forall t\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, $\frac{2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$.

2.2) En déduire la valeur de $g(x)$, pour tout $x\in]0,\infty[$.

Et un dernier exercice **pour les 5/2 uniquement.**

Exercice 8 ***Une équation différentielle non linéaire*** (Solution : 9) On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t\in\mathrm{I}, \quad y'(t) + 2y(t) = y(t)^2,$$

où I est un certain intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant zéro et $y : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

1 — On admet que y ne s'annule pas sur I. On pose $z = \frac{1}{y}$, trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par z et la résoudre.

2 — En déduire l'expression de y.

3 — A posteriori, quel intervalle I, le plus grand possible, peut-on prendre ?

4 — Étudier la solution y sur l'intervalle I.

3. PROBABILITÉS & STATISTIQUES

Rien sur cette partie pour le moment.

Solution (exercice 3) (Énoncé : 1)

1 — Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de $\mathbf{R}^3$, ainsi que $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) &= f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z') \\ &= (\lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z', 0) \\ &= \lambda(y,z,0)+\mu(y',z',0). \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{f \text{ est linéaire.}}$

2 — Le noyau est : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | y = z = 0\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,0)\}}$.
L'image est : $\boxed{\mathrm{Im}(f)} = \{(y,z,0) \in \mathbf{R}^3 | (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\} = \boxed{\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | z = 0\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}}$.

3 — Pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ on a $\boxed{f^2(x,y,z)} = f(y,z,0) = \boxed{(z,0,0)}$, $\boxed{f^3(x,y,z)} = f(z,0,0) = \boxed{(0,0,0)}$ et par suite : $\boxed{f^k = 0_{\mathrm{L(E)}}}$ pour tout $\boxed{k \geqslant 3}$.

4 — 4.1) On développe $\boxed{(\mathrm{I}-f)\circ(\mathrm{I}+f+f^2)} = \mathrm{I}+f+f^2-f-f^2-f^3 = \mathrm{I}-f^3 \boxed{= \mathrm{I}}$ en téléscopant et en utilisant $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

4.2) De même, on montre que : $(\mathrm{I}+f+f^2)\circ(\mathrm{I}-f) = \mathrm{I}$. Ainsi, g est un endomorphisme inversible de E d'inverse $\boxed{g^{-1} = \mathrm{I}+f+f^2}$: $\boxed{\text{c'est un automorphisme de E}}$.

5 — — 1ère Méthode : comme I et f commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton, en tenant compte de l'égalité $f^k = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ pour $k \geqslant 3$: il ne reste finalement que les termes ci-dessous

$$g^n = (\mathrm{I}-f)^n = \mathrm{I}+\binom{n}{1}(-1)f+\binom{n}{2}(-1)^2f^2 = \boxed{\mathrm{I}-nf+\frac{n(n-1)}{2}f^2}.$$

La formule obtenue, *a priori* valable pour $n \geqslant 2$, est en fait encore valable pour $n = 0$ ou $n = 1$.
— 2ème Méthode : par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on pose $a_0 = 1$, $b_0 = 0 = c_0$ puisque $g^0 = \mathrm{I}$. Supposons la formule établie au rang n. Alors :

$$\begin{aligned} g^{n+1} &= g\circ g^n = g(a_n\mathrm{I}+b_nf+c_nf^2) \\ &= a_n(\mathrm{I}-f)+b_n(\mathrm{I}-f)f+c_n(\mathrm{I}-f)f^2 \\ &= a_n\mathrm{I}+(-a_n+b_n)f+(-b_n+c_n)f^2. \end{aligned}$$

On pose donc $a_{n+1} = a_n = 1$, $b_{n+1} = b_n - a_n = b_n - 1$ et $c_{n+1} = c_n - b_n$. D'où l'existence des trois suites par principe de récurrence.
Déterminons leur expression. Par propriété sur les suites arthmétiques, on obtient $b_n = -n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a déjà obtenu que la suite (a_n) est constante, d'où : $c_{n+1} = c_n + n$ et par récurrence immédiate, $c_n = 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.
On a alors, peu importe la méthode, pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ et $n \in \mathbf{N}$:

$$\boxed{g^n(x,y,z) = \left(x-ny+\frac{n(n-1)}{2}z, y-nz, z\right)}.$$

6 — 6.1) On observe que : $\boxed{v_{n+1}} = \mathrm{I}(v_n) - f(v_n) = \boxed{g(v_n)}$.

6.2) Par récurrence, on obtient alors : $\boxed{v_n = g^n(v_0)}$.

6.3) On déduit de **5)** :

$$\boxed{\begin{cases} x_n &= x_0 - ny_0 + \frac{n(n-1)}{2}z_0 \\ y_n &= y_0 - nz_0 \\ z_n &= z_0 \end{cases}}.$$

6.4) La suite (y_n) converge si et seulement si $z_0 = 0$ et (x_n) converge alors si et seulement si $y_0 = 0$. Ainsi, les $\boxed{\text{trois suites convergent simultanément si et seulement si } y_0 = z_0 = 0}$.

Solution (exercice 4) (Énoncé : 1)

1.

$$\begin{aligned}
\cos(2x)\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{4!}+o(x^5)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-2x^3+\frac{2x^5}{6}+\frac{2x^5}{3}+o(x^5)\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{x-\frac{13x^3}{6}+\frac{121}{120}x^5+o(x^5).}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\exp\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\Bigg(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)^2\\
&\quad+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)^3\Bigg)\\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{48}+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{\mathrm{e}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+o(x^3)\right).}
\end{aligned}$$

On ne peut pas utiliser la formule pour $(1+x)^\alpha$ car, ici, la puissance dépend de x.

3.

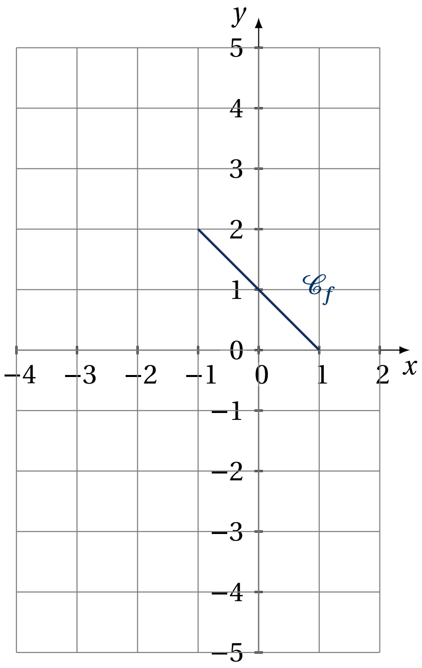
$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sin x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{1-\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{5!}+o(x^4)\right)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{5!}+o(x^4)+\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{5!}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^4}{36}+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+o(x^4).}
\end{aligned}$$

Solution (exercice 5) (Énoncé : 2)

1 — La fonction f est définie là où $x\longmapsto 1+x$ ne s'annule pas et $x\longmapsto 1-x$ est positive. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f=]-\infty,1[\setminus\{-1\}.}$ De plus,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\left(1-x+x^2+o(x^2)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-\frac{1}{2}x(1-x+x^2)-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-\frac{1}{2}x(1-x)-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)x^2+o(x^2)\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{1-\frac{3}{2}x+\frac{11}{8}x^2+o(x^2)}.
\end{aligned}$$

2 — On regarde la partie d'ordre 1 pour connaître l'équation de la tangente. Ici, on trouve $\boxed{y=1-\frac{3}{2}x}$. Puisque $f(x)-\left(1-\frac{3}{2}x\right) = \frac{11}{8}x^2+o(x^2)$, la fonction $x\in\mathscr{D}_f\longmapsto f(x)-\left(1-\frac{3}{2}x\right)$ est localement positive au voisinage de zéro, donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de la tangente d'équation } y=1-\tfrac{3}{2}x}$.



Solution (exercice 6) (Énoncé : 2)

1 — 1.1) La fonction f est définie dérivable (en tant que quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas) sur $\mathbf{R}^{+\star}$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$. On déduit alors le tableau de variations de f à l'aide du signe de $x \longmapsto -(x+1) = -x-1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\mathrm{e}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Les limites s'obtiennent par opérations classiques sur les limites et par croissances comparées. En effet,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y} = -\infty,$$

par croissances comparées. Les limites en zéro découlent d'opérations usuelles sur les limites, celle en $+\infty$ de $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$.

1.2) Il s'agit de vérifier que la suite ne s'annule jamais, et donc que l'on reste dans $\mathscr{D}_f$ à chaque itération, *i.e.* $f(\mathbf{R}^{+\star}) \subset \mathbf{R}^{+\star}$. Mais comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que $f(\mathbf{R}^{+\star}) = [\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)[= \mathbf{R}^{+\star}$. Donc : $\boxed{\text{la suite est bien définie}}$.

2 — Les boucles `while` s'arrêtent dès que u_n est très grand ou très petit. Pour `programme1`, le résultat donne $\boxed{u_5 \leqslant 0.00001}$. Pour `programme2`, nous avons $\boxed{u_6 \geqslant 100000}$. On peut conjecturer le comportement des sous-suites extraites des termes pairs et impairs : $\boxed{\text{les pairs convergent peut-être vers 0, et les impairs divergent peut-être vers } / +\infty.}$

3 — 3.1) La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}^+$ en tant que différence de telles fonctions. Soit $x \in \mathbf{R}_+$,. Alors

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x = -xf(x) - 2x = -x\big(f(x)+2\big).$$

Puisque f est strictement positive sur $\mathbf{R}^{+\star}$ (donc $f+2$ aussi) d'après le tableau de variations, la fonction g' est quant à elle négative sur $\mathbf{R}^{+\star}$.

Donc : $\boxed{g \text{ est une fonction strictement décroissante sur } \mathbf{R}^+.}$

3.2) Déduisons que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbf{R}_+^*$. On souhaite ici montrer l'existence et l'unicité, il faut donc chercher à appliquer le théorème de la bijection sur un intervalle bien choisi.

En effet, remarquons déjà que pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $f(x) = x \iff e^{-x} = x^2 \iff g(x) = 0$. Or, g est une fonction continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$, elle est de plus strictement décroissante et $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$. Ainsi, g réalise une bijection de $\mathbf{R}^{+\star}$ vers $]-\infty, 1]$, et comme $0 \in]-\infty, 1]$, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in \mathbf{R}^{+\star} \text{ tel que } g(\alpha) = 0 \text{ donc tel que } f(\alpha) = \alpha.}$

3.3) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$, *i.e.* que :

$$g\left(\frac{1}{e}\right) > 0, \quad g(1) < 0.$$

Nous avons $f(1) = \frac{1}{e} < 1$ donc $g(1) < 0$. Et $g\left(\frac{1}{e}\right) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} = e^{1-\frac{1}{e}} - e^{-1} = e^{-1}\left(e^{2-\frac{1}{e}} - 1\right) > 0$ car $2 - \frac{1}{e} > 1$. Donc : $\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1.}$ Cette inégalité va nous permettre d'initialiser l'algorithme de Dichotomie ci-après.

```python
import math as ma
def g(x):
    return ma.exp(-x)-x**2
def dichotomie(prec):
    '''
    retourne une valeur approchee de alpha à precision eps via l'algorithme de dicho
    '''
    a = 1/ma.exp(1)
    b = 1
    while b-a > prec:
        c = (a+b)/2
        if g(a)*g(c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

Par exemple pour `prec = 10**(-3)`, on obtient 0.7033848354324981.

4 — 4.1) Nous avons $u_2 = \frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{1-e^{-1}}$, il s'agit donc de vérifier que $1 - e^{-1} > 1$, ce qui est équivalent à $1 > e^{-1}$. L'égalité est vérifiée. Pour la seconde, $u_3 = \frac{e^{-e^{1-e^{-1}}}}{e^{1-e^{-1}}}$ il s'agit de montrer que $\frac{e^{-e^{1-e^{-1}}}}{e^{1-e^{-1}}} < e^{-1}$, ou encore en passant au logarithme :

$$e^{-1} - 1 - e^{1-e^{-1}} < -1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-1} < e^{1-e^{-1}}.$$

En passant à nouveau au logarithme, on obtient :

$$-2 < -e^{-1} \quad \text{égalité bien entendu vérifiée.}$$

D'où en conclusion : $\boxed{u_2 > u_0 \text{ et } u_3 < u_1.}$

4.2) La fonction f est décroissante sur $\mathbf{R}^{+\star}$, donc $f \circ f$ est quant à elle croissante sur $\mathbf{R}^{+\star}$. Soit $n \in \mathbf{N}$, appliquons n fois la fonction $f \circ f$ aux inégalités établies dans la question précédente. On obtient :

$$u_{2n+2} > u_{2n}, \quad u_{2n+3} < u_{2n+1}.$$

C'est exactement dire que

$\boxed{(u_{2n}) \text{ (\textit{resp.} } (u_{2n})) \text{ est strictement croissante (\textit{resp.} strictement décroissante).}}$

5 — On pose : $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On va établir d'abord qu'il s'agit du prolongement par continuité en zéro de la fonction f^2.

5.1) Soit x un réel strictement positif. Par définition, pour $x > 0$,

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = x e^{x - \frac{e^{-x}}{x}}.$$

Par opérations sur les limites, on a : $x - \frac{e^{-x}}{x} \xrightarrow{x\to 0} -\infty$ donc par produit $h(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est continue en zéro.}}$

5.2) L'équation $h(x) = x$ admet déjà zéro comme solution, résolvons-là à présent sur $\mathbf{R}_{+\star}$. On a

$$\begin{aligned} & h(x) = x \\ \Longleftrightarrow \quad & x e^{x - \frac{e^{-x}}{x}} = x \\ \Longleftrightarrow \quad & x - \frac{e^{-x}}{x} = 0 \quad \textit{simplification par } x \neq 0 \textit{ puis passage au logarithme} \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 = e^{-x} \\ \Longleftrightarrow \quad & x = f(x). \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont donc les éléments de } \{0, \alpha\}.}$

5.3) Constatons d'abord que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie une relation de récurrence à un pas. En effet, soit $n \in \mathbf{N}$, alors

$$u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f \circ f(u_{2n+1}) = h(u_{2n+1}) \quad (\star)$$

car les termes de la suite sont strictement positifs d'après une question précédente. La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante (déjà vu), et est minorée par zéro, donc converge vers une limite finie que nous notons $l \in \mathbf{R}$. Passons à la limite dans $(\star)$:

$$l = \lim_{n\to\infty} h(u_{2n+1}) =_! h\left(\lim_{n\to\infty} u_{2n+1}\right) = h(l),$$

car h est continue sur $\mathbf{R}^+$ (étape!). Donc l est une solution de l'équation $h(x) = x$, donc $l = 0$ ou α. La seconde limite est impossible, puisque $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et que $u_{2n+1} \leqslant u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$ d'après une question précédente. Donc si $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergeait vers α on aurait par passage à la limite $\alpha < \alpha$ — contradiction.

Donc, en conclusion : $\boxed{u_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.}$

5.4) La suite des termes paris est quant à elle croissante, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{2n} \geqslant u_0 = 1$. On montre de-même qu'avant que, comme la fonction h est continue, la suite (u_{2n}) ne peut converger que vers une solution de l'équation $x = h(x)$. Comme $\alpha < 1$, et que $u_{2n} \geqslant 1 > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, elle ne peut converger ni vers α, ni vers zéro. Donc elle diverge et c'est forcément vers $+\infty$ car elle est positive. Donc $\boxed{u_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.}$

Solution (exercice 7) (Énoncé : 3)

1 — *(Première méthode : Étude de fonction)*

1.1) Puisque la fonction $f : t \longmapsto \frac{2}{(1+t^2)(1+t)^2}$ est continue sur $\left[\frac{1}{x}, x\right]$ pour tout $x \in]0, \infty[$, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est définie continue sur }]0,\infty[.}$ De plus, soit F une primitive de f. Alors, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right),$$

ainsi g est dérivable comme composée et différence de fonctions dérivables. Donc :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{2}{(1+x^2)(1+x)^2} + \frac{2}{x^2(1+1/x^2)(1+1/x)^2}\\
&= \frac{2}{(1+x^2)(1+x)^2} + \frac{2x^2}{(x^2+1)(1+x)^2}\\
&= \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x)^2}\\
&= \boxed{\frac{2}{(1+x)^2}} = -2\left(\frac{1}{1+x}\right)'.
\end{aligned}$$

1.2) Donc en primitivant l'égalité précédente, on obtient $g(x) = -\frac{2}{1+x} + \mathrm{K}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbf{R}$. Or, $g(1) = 0$ donc $\mathrm{K} - 1 = 0$ et finalement $\mathrm{K} = 1$, donc $\boxed{g(x) = 1 - \frac{2}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}.}$

2 — *(Seconde méthode : Décomposition en éléments simples)*

2.1) On cherche $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$ tels que : $\forall t \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$, $\frac{2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$. Réduisons au même dénominateur : l'égalité souhaitée est alors équivalente à

$$\frac{2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{a(1+t)(1+t^2) + b(1+t^2) + (ct+d)(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2},$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(1+t^2)(1+t)^2} &= \frac{a(1+t)(1+t^2) + b(1+t^2) + (ct+d)(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2},\\
&= \frac{(a+c)t^3 + (a+b+d+2c)t^2 + (a+c+2d)t + (a+b+d)}{(1+t^2)(1+t)^2}.
\end{aligned}$$

Après identification, nous obtenons :

$$\begin{cases} a+c &= 0, \\ a+b+d+2c &= 0 \\ a+c+2d &= 0 \\ a+b+d &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a+c &= 0, \\ b+c+d &= 0 \\ 2d &= 0 \\ b-c+d &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -c \\ b &= -c \\ d &= 0 \\ c &= -1 \end{cases}.$$

Donc : $\boxed{a=b=1, c=-1, d=0.}$

2.2) Soit $x \in]0,\infty[$. Alors :

$$g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{-t}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t.$$

Puis, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} g(x) &= [\ln|1+t|]_{1/x}^{x} - \left[\frac{1}{1+t}\right]_{1/x}^{x} - \frac{1}{2}\left[\ln\left|1+t^2\right|\right]_{1/x}^{x} \\ &= \ln\left|\frac{1+x}{1+1/x}\right| - \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+1/x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x^2}{1+1/x^2}\right| \\ &= \ln\left|\frac{x(1+x)}{(1+x)}\right| - \left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2(1+x^2)}{(x^2+1)}\right| \\ &= \ln x - \left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2} 2\ln x \\ &= \boxed{\frac{1-x}{1+x}.} \end{aligned}$$

multiplication des fractions des log par x et x^2

Solution (exercice 8) (Énoncé : 3)

1 — Puisque y ne s'annule pas, la fonction z est donc dérivable sur I, et $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Donc en utilisant l'équation différentielle satisfaite par y, on obtient :

$$z' = -z^2\left(-2y+y^2\right) = -z^2\left(\frac{-2}{z} + \frac{1}{z^2}\right).$$

Finalement, on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par z : $\boxed{z' - 2z = -1.}$

2 — On résout tout d'abord l'équation homogène, les solutions sont de la forme $t \longmapsto \mathrm{K}e^{2t}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbf{R}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre, sous la forme d'une constante. On trouve finalement l'ensemble des solutions

$$\left\{ z : t \longmapsto \mathrm{K}e^{2t} + \frac{1}{2},\ \mathrm{K} \in \mathbf{R} \right\}.$$

Comme $z(0) = 1$, nous obtenons comme condition sur K : $\mathrm{K} + \frac{1}{2} = 1 \iff \mathrm{K} = \frac{1}{2}$. On trouve alors l'unique solution en y de l'équation différentielle de départ :

$$\boxed{y : t \longmapsto \frac{2}{e^{2t}+1}}.$$

3 — Comme $e^{2t} + 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, nous pouvons prendre $\boxed{\mathrm{I} = \mathbf{R}}$.

4 — La fonction y est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Et, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$y'(t) = -\frac{2.2.e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2} = -\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2} \leqslant 0.$$

La fonction est donc décroissante et $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ et $\lim_{t\to-\infty} = 2$. On peut ainsi tracer la courbe représentative.