

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.



Problème 1 Datation au Carbone 14 D'un point de vue physique, l'atome de Carbone 14 est un isotope radioactif du Carbone 12. Son noyau est composé de six protons et de huit neutrons, à la différence du Carbone 12 qui ne compte que six neutrons. Cet élément est présent en quantité constante dans l'atmosphère car en régénération perpétuelle sous l'action des rayons cosmiques sur les atomes d'azote présents dans l'atmosphère.

La Terre est bombardée en permanence par des particules très énergétiques venant du cosmos. Ce rayonnement cosmique est composé notamment de protons très rapides. Les noyaux des atomes présents dans l'atmosphère explosent littéralement sous le choc de ces protons très énergétiques et, parmi les fragments, on trouve des neutrons très rapides. Ces neutrons rapides peuvent à leur tour réagir avec des noyaux d'azote de la haute atmosphère. Lors du choc, tout se passe comme si un neutron rapide éjectait un des protons d'un des noyaux d'azote et prenait sa place pour former un noyau comptant six protons et huit neutrons. Ce noyau est un isotope particulier du carbone, le Carbone 14, qui est radioactif : en émettant un électron et une particule non observable, l'antineutrino, il se décompose en un noyau d'azote comptant sept protons et sept neutrons.

Partie I— Modélisation de la désintégration.

Dans la suite de ce texte, nous ne cherchons pas à décrire outre mesure le processus de régénération du Carbone 14 dans l'atmosphère ni son absorption dans la chaîne du vivant. En revanche, nous visons à modéliser précisément le phénomène de désintégration de l'atome.

Dans ce contexte, voici comment les auteurs d'un ouvrage de physique à destination du grand public explique au lecteur le phénomène radioactif : «la probabilité qu'un atome radioactif, présent dans une source donnée à un instant t , se désintègre durant un court intervalle de temps dt suivant cet instant t est proportionnelle à la durée de l'intervalle dt considéré».

Essayons d'interpréter ce résultat en termes probabilistes. Désignons pour cela par T la variable aléatoire modélisant la durée de vie de l'atome, c'est-à-dire, la durée séparant sa création de sa désintégration. Nous supposons T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $]0, \infty[$.

- 1 — On se place à un instant t où l'atome ne s'est pas désintégré. Expliquer avec un vocabulaire précis pourquoi les propos précédents peuvent s'écrire :

$$\mathbf{P}(T \in]t, t+h[| T > t) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \lambda h$$

pour une certaine constante $\lambda > 0$.

- 2 — En désignant par F la fonction de répartition de T , en déduire que

$$\forall t \geq 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lambda(1 - F(t)).$$

- 3 — En déduire que F est dérivable à droite. Des arguments physiques nous permettent de justifier que F est dérivable.

- 4 — Former une équation différentielle vérifiée par F et en déduire que : $\forall t \geq 0, \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

- 5 — Reconnaître la loi de T , donner sa variance et son espérance.

- 6 — Écrire une fonction d'en-tête des intègre(lambda) qui simule la durée de vie d'un atome de carbone.

7 — On appelle dans ce cadre *demi-vie* la médiane de T , i.e. le temps $t_{1/2}$ défini par :

$$\mathbf{P}(T \leq t_{1/2}) = \mathbf{P}(T \geq t_{1/2}) = \frac{1}{2}.$$

Déterminer $t_{1/2}$ en fonction de λ . Des mesures physiques donnent $t_{1/2} = 5730$ ans, vérifier que l'on a alors : $\lambda = 3,8 \cdot 10^{-12} \text{s}^{-1}$. On dit que λ est la constante de radioactivité.

On considère dans toute la suite, que la durée de vie des atomes de Carbone 14 suit une \mathcal{E} ($\lambda = 3,8 \cdot 10^{-12} \text{s}^{-1}$).

Partie II— Étude de la teneur en Carbone 14.

La régénération perpétuelle du Carbone 14 dans l'atmosphère et de son incorporation dans la chaîne du vivant nous apprend que la teneur en Carbone 14 dans les organismes vivants est constante, égale à $N_0 = 6,8 \cdot 10^{10}$ atomes de Carbone 14 par gramme de carbone. À l'opposée, le Carbone 14 présent dans un organisme mort n'est plus renouvelé et se désintègre petit à petit en atomes d'azote. Dans cette perspective, cette partie vise à étudier le processus stochastique décrivant les désintégrations successives de Carbone 14 survenant dans une masse macroscopique de matière devenue inerte. L'organisme mort contient alors un très grand nombre de particules de Carbone 14, et nous ferons l'hypothèse, raisonnable, qu'elles se désintègrent indépendamment les unes des autres. La loi de modélisation de la durée de vie d'un atome de Carbone 14 étant, d'après la première partie, de type exponentielle, tout se passe comme si tous les atomes de Carbone 14 présents au moment de la mort de l'organisme étaient créés à cet instant même.

On numérote les atomes de Carbone 14 de l'échantillon, et on note T_i la durée de vie de l'atome numéro i qui suit donc une loi exponentielle de paramètre λ .

On note N le nombre total d'atomes au début de l'étude.

On définit (Z_1, Z_2, \dots, Z_N) les variables aléatoires obtenues en réordonnant par ordre croissant les variables aléatoires T_i . Ainsi en particulier : $Z_1 = \min(T_1, \dots, T_N)$ et $Z_N = \max(T_1, \dots, T_N)$. Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

8 — Écrire une fonction d'en-tête $Z(k, N, \lambda)$ qui simule l'expérience et renvoie la valeur de Z_k . Comment déterminer une valeur approximative de $\mathbf{E}(Z_k)$ et $\mathbf{Var}(Z_k)$ à l'aide de cette fonction? On pourra répondre à la question en créant deux autres fonctions renvoyant espérance et variance.

9 — Soit $t > 0$. On note N_t le nombre d'atomes qui se sont désintégrés avant l'instant t . Quelle est la loi de N_t ?

10 — Montrer que : $\{N_t \geq k\} = \{Z_k \leq t\}$.

11 — Montrer : $\forall t > 0, \mathbf{P}(Z_k \leq t) = \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} (1 - e^{-\lambda t})^i e^{-(N-i)\lambda t}$.

12 — Montrer que Z_k admet une densité f_k définie par :

$$f_k(t) = \begin{cases} \lambda \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} e^{-(N-k+1)\lambda t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie III— Datation au Carbone 14.

Étant donné un gramme de matière d'origine organique, imaginons que les physiciens et les chimistes soient capables d'en déterminer avec précision la teneur en atomes de Carbone 14. Désignons alors par N le nombre estimé d'atomes dans le morceau en question et appelons t la durée nous séparant de sa mort.

À la mort de l'organisme, référencée à partir de maintenant comme l'instant 0 (de sorte que t désigne également l'instant présent) nous savons que le gramme de carbone comptait environ $N_0 = 6,8 \cdot 10^{10}$ atomes de Carbone 14.

La mesure réalisée par les physiciens nous indique que $N_0 - N$ particules se sont alors désintégrées entre l'instant 0 (la mort), et l'instant t présent.

Nous supposons une fois encore que les particules de Carbone 14 au sein du gramme étudié se désintègrent indépendamment les unes des autres.

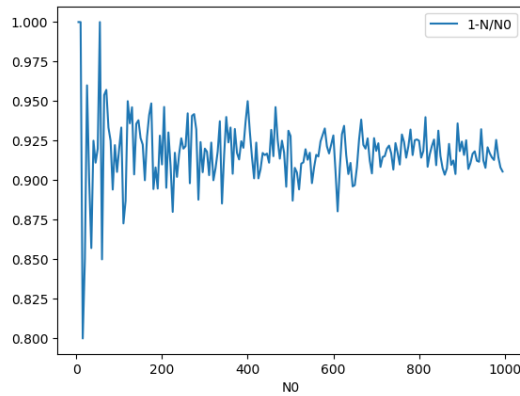
13 — On numérote à nouveau nos atomes de carbone radioactif à l'instant 0, et on note B_i la variable aléatoire égale à 1 si l'atome numéro i s'est désintégré d'ici à l'instant t et 0 sinon.

13.1. Montrer que : $N_0 - N = \sum_{i=1}^{N_0} B_i$.

13.2. Quelle est la loi de B_i ?

13.3. Écrire une fonction d'en-tête $f(\text{NO}, t, \lambda)$ qui simule l'expérience et qui renvoie $1 - \frac{N}{N_0}$.

13.4. On a tracé pour différentes valeurs de N_0 le résultat de cette fonction pour une valeur de t arbitraire.



Qu'en pensez-vous quand $N_0 \rightarrow \infty$? Que représente à votre avis cet axe limite? Comment l'expliquer?

13.5. Comme N_0 est très grand, en déduire qu'une valeur approchée de t est $\frac{\ln(N_0) - \ln(N)}{\lambda}$. Comment dater alors le morceau organique?

14 — Se pose en pratique la question de la détermination de la teneur en Carbone 14 du morceau de matière d'origine organique.

Dans la même référence que précédemment, le mode expérimental est décrit de la façon suivante : «La mesure de la teneur en Carbone 14 actuelle de l'échantillon est évaluée par comptage des désintégrations sur une période de trois jours».

Rappelons que N désigne le nombre d'atomes de Carbone 14 actuellement présents dans l'échantillon. On note n_d le nombre de désintégrations ayant lieu entre l'instant t et l'instant $t + \delta$ ($\delta = 3$ jours selon les conditions expérimentales précédentes).

En utilisant le caractère sans mémoire de la loi exponentielle, on peut considérer que tout se passe comme précédemment avec pour situation initiale N atomes au lieu de N_0 et une durée de temps δ au lieu de t .

En déduire une approximation de N en fonction de n_d, λ, δ .

Partie IV— Limite de la méthode.

Pour que la loi des grands nombres puisse être appliquée au contexte précédent, et que l'approximation ci-dessus soit acceptable, il est nécessaire que N soit suffisamment grand. Nous cherchons désormais à quantifier cette restriction théorique, afin d'exhiber un seuil de validité de la méthode de datation.

Remarque : du fait de la très grande valeur de N_0 , on considère que l'approximation $\frac{N}{N_0} \approx e^{-\lambda t}$ est valable et on s'intéresse

uniquement à l'approximation $N \approx \frac{n_d}{1 - e^{-\lambda \delta}}$ où n_d est le nombre d'atomes qui se sont désintégrés pendant δ jours.

15 — On note N le nombre d'atomes de Carbone 14 présents au moment de la mesure, correspondant à une datation réelle $t = \frac{\ln(N_0) - \ln(N)}{\lambda}$ et $N_e = \frac{n_d}{1 - e^{-\lambda \delta}}$ le nombre d'atomes estimé, correspondant à une datation estimée $t_e = \frac{\ln(N_0) - \ln(N_e)}{\lambda}$.

On note $\varepsilon = \frac{N_e - N}{N}$ l'erreur relative entre N et son estimation N_e . Quelle erreur de datation provoque une erreur relative de 5%?

16 — De la même manière que dans la partie précédente, on numérote les N atomes de carbone radioactif présents dans l'échantillon à l'instant t et on note B'_i la variable aléatoire égale à 1 si l'atome numéro i se désintègre entre t et $t + \delta$.

On rappelle que $B'_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$ avec $\alpha = 1 - e^{-\lambda \delta}$. On notera $\sigma = \sigma(B'_i)$. Montrer que : $\alpha \varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B'_i - \alpha$.

17 — On note $Y_n = \frac{B'_1 + \dots + B'_n}{n}$, et $Y_n^* = \frac{Y_n - \alpha}{\sigma / \sqrt{n}}$. On notera également F_n la fonction de répartition de Y_n^* . Montrer que :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B'_i - \alpha\right| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - (F_n(2) - F_n(-2)) + \mathbf{P}(Y_n^* = 2).$$

On admettra dans la suite que : $\mathbf{P}(Y_n^* = 2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

18 — À l'aide du théorème central limite, déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B'_i - \alpha\right| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ en fonction de Φ , la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et donner une approximation numérique.

19 — Le théorème de BERRY-ESSEN permet de quantifier la vitesse de convergence dans le théorème central limite. Plus précisément, nous avons :

Théorème 1 | BERRY-ESSEN

Soient n un entier et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d., admettant des moments d'ordre trois. On note :

- ❶ $\mu = \mathbf{E}(X_i)$,
- ❷ $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X_i)$, et on suppose $\sigma > 0$,
- ❸ $\rho = \mathbf{E}(|X_i - \mu|^2)$.

On note : $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et Y_n^* la centrée-réduite associée à Y_n , F_n la fonction de répartition de Y_n^* , Φ la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(0,1)$. Alors, il existe une constante $C \approx 0.5 \in \mathbf{R}$ telle que :

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C\rho}{\sigma^3 \sqrt{n}}.$$

19.1. Dans le but d'appliquer ce théorème pour les variables (B'_i) , déterminer μ, σ^2, ρ en fonction de α . Démontrer également que $\mu \approx \lambda\delta, \sigma \approx \sqrt{\lambda\delta}$ et $\rho \approx \lambda\delta$.

19.2. Déterminer un entier n_0 vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad |F_n(x) - \Phi(x)| < 0.025.$$

Démontrer qu'alors il existe $\tilde{n}_0 \geq n_0$ tel que :

$$\forall n \geq \tilde{n}_0, \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B'_i - \alpha\right| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) < 0.1.$$

On suppose pour la suite, que l'on a effectivement $N > \tilde{n}_0$, et pour simplifier que $n_0 = \tilde{n}_0$.

20 — En déduire : $\mathbf{P}\left(|\varepsilon| \geq \frac{2}{\sqrt{\lambda\delta N}}\right) \leq 0.1$.

21 — En considérant que $N_0 e^{-\lambda t}$ est une bonne approximation de N , en déduire une valeur maximale pour t pour avoir $\mathbf{P}(|\varepsilon| < 0.05) > 0.9$, et la valeur correspondante.

22 — La valeur trouvée permet-elle de justifier *a posteriori* les différentes approximations faites?

Correction

Solution (Problème 1)

Partie I— Modélisation de la désintégration..

1 — Nous savons que, si l'on se place à un instant t (i.e. si l'atome ne s'est pas encore désintégré à cet instant donc sachant $\{T > t\}$), la probabilité pour qu'il se désintègre pendant $]t, t+h[$ avec $h > 0$ est proportionnelle à $t+h-t = h$, i.e. il existe

$\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{P}(T \in]t, t+h[| \{T > t\}) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \lambda h$.

2 — Commençons par reformuler l'hypothèse. Elle signifie que, pour $t \in [0; +\infty[$:

$$\frac{\mathbf{P}(\{t < T < t+h\} \cap \{T > t\})}{h\mathbf{P}(T > t)} = \frac{\mathbf{P}(t < T < t+h)}{h\mathbf{P}(T > t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{h(1 - F(t))} \underset{h \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \lambda.$$

Comme $1 - F(t)$ ne dépend pas de h , cette limite s'écrit aussi :

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \underset{h \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} (1 - F(t))\lambda.$$

C'est exactement la définition de la dérivabilité de F en $t \in [0; +\infty[$, ceci étant vrai pour tout t , nous avons : F dérivable sur $[0; +\infty[$.

Plus précisément la dérivabilité à droite, mais l'énoncé admet celle à gauche.

3 — La question précédente donne en plus que F vérifie :

$$F'(t) = \lambda(1 - F(t)), \quad \forall t \in [0; +\infty[.$$

4 — On résout immédiatement l'équation différentielle : d'une part, d'après la formule du cours, l'ensemble des solutions de l'homogène est

$$\{t \in [0; +\infty[\mapsto Ce^{-\lambda t}, C \in \mathbf{R}\}.$$

Comme le second membre est constant, on peut gagner du temps chercher une solution particulière sous forme d'une constante. En conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\{t \in [0; +\infty[\mapsto Ce^{-\lambda t} + 1, C \in \mathbf{R}\}.$$

Mais comme $F(0) = 0$, il vient comme condition $C + 1 = 0$ donc $C = -1$, et finalement :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

5 — Puisque la fonction de répartition détermine la loi, on déduit que $T \mapsto \mathcal{E}(\lambda)$ d'après la partie précédente, et d'après

le cours : $\mathbf{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbf{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$.

6



Script

```
1 import random as rd
2 from math import log
3 def desintegre(lambda):
4     '''
5     lambda -> une simulation de l'exponentielle de paramètre lambda
6     '''
7     return -(1/lambda)*np.log(rd.random())
```

7 — Pour la première égalité, il s'agit de résoudre $1 - e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda t_{1/2} \iff t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. On vérifie

ensuite sans peine que le $t_{1/2}$ trouvé vérifie la condition $\mathbf{P}(T \geq t_{1/2}) = \frac{1}{2}$.

On a alors $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$. On peut constater le résultat avec Python :

```
1 >>> import math as ma
2 >>> ma.log(2)/(5730*365*24*60*60)
3 3.8358731081481286e-12
```

On obtient la valeur cherchée.

Partie II— Étude de la teneur en carbone 14.

```
8 >_ Script
1 # On choisit ici, par exemple, le tri rapide pour ordonner l'échantillon
2 def tri_rapide_rec(L):
3     '''
4     Retourne une liste triée par ordre croissant des éléments de L,
5     selon le tri rapide. Version récursive.
6     '''
7     if L == []:
8         return []
9     else:
10        pivot = L[0]
11        inf_pivot = []
12        sup_pivot = []
13        for x in L[1:]:
14            if x < pivot:
15                inf_pivot.append(x)
16            else:
17                sup_pivot.append(x)
18        return tri_rapide_rec(inf_pivot) + [pivot] + tri_rapide_rec(sup_pivot)
19
20 def Z(k, N, lamba):
21     T_vecteur = [desintegre(lamba) for _ in range(N)]
22     return tri_rapide_rec(T_vecteur)[k]
```

On peut ensuite tester : $Z(3, 10, 0.01)$ retourne 17.66340550244248.

L'estimation de l'espérance et variance se réalisent donc comme d'habitude avec la loi faible des grands nombres, et la moyenne / variance empirique.

```
>_ Script
1 def estim_esp(j, N, lamba):
2     E = 0
3     for _ in range(10**3):
4         E += Z(j, N, lamba)
5     return E/10**3
6
7 def estim_var(j, N, lamba):
8     E = estim_esp(j, N, lamba)
9     V = 0
10    for _ in range(10**3):
11        V += (Z(j, N, lamba) - E)**2
12    return V/10**3
```

Nous obtenons les estimations suivantes pour les mêmes paramètres que précédemment : 46.55324600923112 pour l'espérance, et 565.4376794763219 pour la variance.

9 — Soit $t > 0$. La probabilité, pour un atome, de se désintégrer avant l'instant t est $\mathbf{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Les désintégrations sont indépendantes, donc $N_t \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1 - e^{-\lambda t})$: c'est le nombre de succès dans N répétitions indépendantes de schémas de bernoulli, de même paramètre de succès $1 - e^{-\lambda t}$.

10 — On a :

$$\begin{aligned} \{N_t \geq k\} &= \{\text{au moins } k \text{ atomes se sont désintégrés avant } t\} \\ &\iff \{Z_1, \dots, Z_k \leq t\} \\ &\iff \{Z_k \leq t\}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé aux deux dernières étapes le fait que les Z_i sont ordonnées.

11 — Donc, avec les notations de l'énoncé, $\mathbf{P}(Z_k \leq t) = \mathbf{P}(N_t \geq k) = \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} (1 - e^{-\lambda t})^i e^{-(N-i)\lambda t}$, en utilisant la loi de N_t

déterminée plus haut. De plus, si $t \leq 0$, nous avons $\{Z_k \leq t\} = \emptyset$ et $\mathbf{P}(Z_k \leq t) = 0$. Mais ceci n'était pas demandé.

12 — Notons $F_k(t) = \mathbf{P}(Z_k \leq t)$ la fonction de répartition de Z_k . La fonction $t \mapsto \mathbf{P}(Z_k \leq t)$ est une fonction continue sur \mathbf{R} dès que $k \geq 1$ (puisque $F_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$), elle est de plus \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} sauf éventuellement en zéro.

— Supposons $k \geq 1$. D'après le cours Z_k admet une densité, et elle est donnée par la dérivée de F_k . Pour $t > 0$, nous avons en utilisant la formule de dérivation d'un produit :

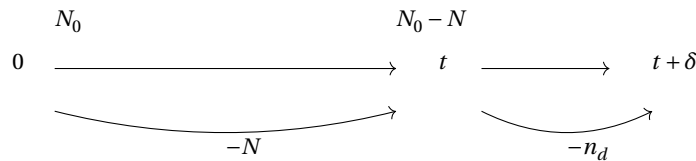
$$\begin{aligned} F'_k(t) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=k}^N \binom{N}{i} (1 - e^{-\lambda t})^i e^{-(N-i)\lambda t} \right) \\ &= \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} \lambda e^{-\lambda t} i (1 - e^{-\lambda t})^{i-1} e^{-(N-i)\lambda t} - \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} (1 - e^{-\lambda t})^i (N-i) \lambda e^{-(N-i)\lambda t} \\ &= \sum_{i=k}^N \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \lambda (1 - e^{-\lambda t})^{i-1} e^{-(N-i)\lambda t} - \sum_{i=k}^{N-1} \frac{N!}{i!(N-i-1)!} (1 - e^{-\lambda t})^i \lambda e^{-(N-i)\lambda t} \\ &= \sum_{j=k-1}^{N-1} \frac{N!}{j!(N-j-1)!} \lambda (1 - e^{-\lambda t})^j e^{-(N-j)\lambda t} - \sum_{i=k}^{N-1} \frac{N!}{i!(N-i-1)!} (1 - e^{-\lambda t})^i \lambda e^{-(N-i)\lambda t} \\ &= \lambda \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} e^{-(N-k+1)\lambda t} \quad \text{par changement de variable, puis simplification.} \end{aligned}$$

— Si $k = 1$, alors il s'agit de montrer que $Z_1 = \min(T_1, \dots, T_N)$ est une variable aléatoire à densité. Nous avons déjà montré (c.f. cours en calculant $\mathbf{P}(Z_1 > t)$), que c'est le cas et que la densité obtenue correspond à celle de l'énoncé lorsque $k = 1$.

En résumé :

$$f_k(t) = \begin{cases} \lambda \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} e^{-(N-k+1)\lambda t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

13 — Voici le contexte sur une échelle de temps.



13.1. C'est immédiat, puisque la somme $\sum_{i=1}^{N_0} B_i$ compte le nombre de désintégrations sur $[0, t]$. Donc $N_0 - N = \sum_{i=1}^{N_0} B_i$.

13.2. Nous sommes dans un contexte de Bernoulli : un succès est donc une désintégration sur $[0, t]$ de l'atome i , donc

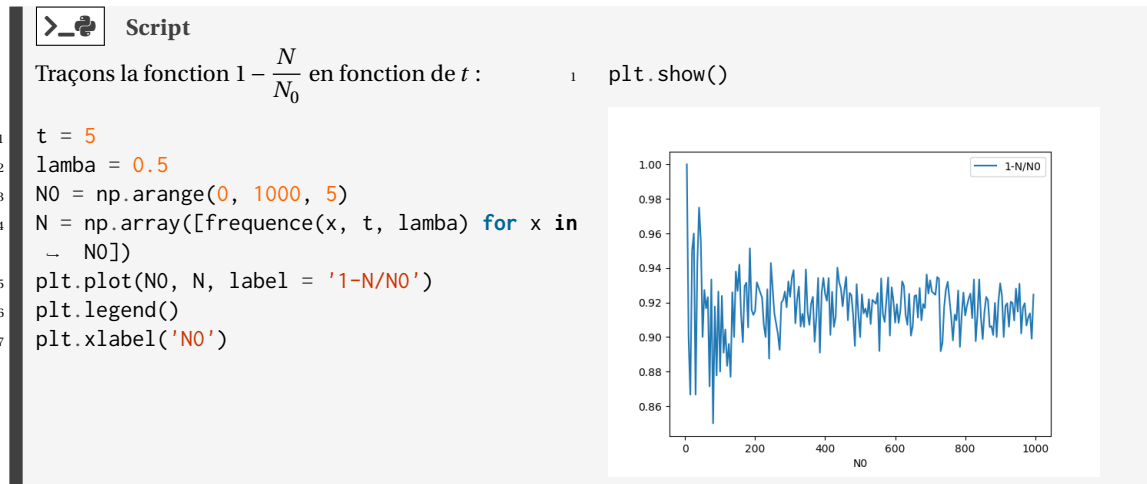
$$B_i \mapsto \mathcal{B} \left(\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \right) = \mathcal{B} (1 - e^{-\lambda t}).$$

13.3. On souhaite renvoyer $1 - \frac{N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} B_i}{N_0}$.

```

>_ Script
1 def frequence(N0, t, lambda):
2     S = 0
3     for _ in range(N0):
4         if rd.random() < 1 - np.exp(-lambda*t):
5             S += 1
6     return S/N0

```



13.4. Lorsque $N_0 \rightarrow \infty$, la variable aléatoire $1 - \frac{N}{N_0}$ semble « converger » en un certain sens (plus précisément, presque-

sûrement) vers une variable aléatoire constante. Puisque $1 - \frac{N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} B_i}{N_0}$ correspond à une moyenne empirique de lois de Bernoulli, on conjecture que cette limite est l'espérance de la loi. Ceci provient de la loi faible des grands nombres (mais en réalité plutôt la loi « forte », hors programme, mais qui donne une meilleure convergence que la convergence en probabilités).²⁰

13.5. D'après le constat précédent, la quantité $1 - \frac{N}{N_0}$ est proche de $\mathbf{E}(B_i) = 1 - e^{-\lambda t}$. Or, $1 - e^{-\lambda t} \approx 1 - \frac{n}{N_0}$ est équivalente

à $t \approx \frac{\ln N_0 - \ln N}{\lambda}$. Si l'on suppose la constante λ connue, cette approximation nous permet de dater le morceau organique par comptage des désintégrations.

14 — Par analogie avec la question précédente, on obtient

$$\delta \approx \frac{\ln N - \ln(N - n_d)}{\lambda},$$

ce qui en isolant N , donne :

$$N \approx \frac{n_d}{1 - e^{-\lambda \delta}}.$$

Partie III — Limite de la méthode.

15 — Un simple calcul montre que $t - t_\varepsilon = \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\lambda}$. Pour $\varepsilon = 0.05$, on obtient $t - t_\varepsilon = \frac{\ln(1.05)}{\lambda} \approx 407$ ans, puis si $\varepsilon = 0.05$, on obtient $t - t_\varepsilon = \frac{\ln(0.95)}{\lambda} \approx -427$ ans. Ainsi, l'erreur est de l'ordre de $\boxed{500 \text{ ans}}$.

16 — Puisque le nombre d'atomes désintégrés est $n_d = \sum_{i=1}^N B'_i$, nous avons :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B'_i - \alpha = \frac{n_d}{N} - \alpha = \frac{\alpha N_e}{N} - \alpha = \boxed{\alpha \varepsilon}.$$

17 — C'est un calcul direct en utilisant les notations introduites par l'énoncé.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B'_i - \alpha\right| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Y_n^*\right| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(|Y_n^*| < 2\right) \\
&= 1 - (F_n(2) - \mathbf{P}(Y_n^* = 2) - F_n(-2)) \\
&= \boxed{1 - (F_n(2) - F_n(-2)) + \mathbf{P}(Y_n^* = 2)}.
\end{aligned}$$

18 — En utilisant le théorème central limite, puisque les B'_i sont i.i.d. et admettent une variance, nous avons : $\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(2) - F_n(-2)) = \Phi(2) - \Phi(-2) \approx 0.05$ en utilisant les tables.

²⁰La seule chose réellement attendue dans cette question est le mot « loi des grands nombres »

19 — 19.1. D'après le cours, $\mathbf{E}(B'_i) = \alpha = \mu$ pour tout entier i . De plus, $\sigma^2 = \mathbf{Var}(B_i) = \alpha(1 - \alpha)$ et

$$\rho = \mathbf{E}(|B'_i - \mu|^3) = \mathbf{P}(B'_i = 1) |1 - \mu|^3 + \mathbf{P}(B'_i = 0) |0 - \mu|^3 = \alpha(1 - \alpha)(1 - 2\alpha + 2\alpha^2)$$

d'après le théorème du transfert. Passons aux approximations : nous avons $\alpha = 1 - e^{-\lambda\delta} \approx 1 - (1 - \lambda\delta) \approx \lambda\delta$, en utilisant le développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle puisque $-\lambda\delta$ est très petite (c'est une constante fois $3,8 \cdot 10^{-12}$, plus précisément $3,8 \cdot 10^{-12} \times 3600 \times 3$). De même $\sigma^2 = \alpha(1 - \alpha) = (1 - e^{-\lambda\delta})e^{-\lambda\delta} \approx 1\lambda\delta$, donc $\sigma \approx \sqrt{\lambda\delta}$.

Et enfin, $\alpha = 1 - e^{-\lambda\delta} \approx \lambda\delta$, et $(1 - \alpha)(1 - 2\alpha + 2\alpha^2) \approx 1(1 - 2 + 2) \approx 1$, donc $\rho \approx \lambda\delta$.

19.2. D'après les calculs précédents, les hypothèses du théorème de BERRY-ESSEN sont satisfaites. Donc, il suffit de choisir n_0 de sorte que

$$\frac{C\rho}{\sigma^3 \sqrt{n_0}} < 0.025 \iff n_0 > \left(\frac{C\rho}{\sigma^3 \cdot 0,025} \right)^2.$$

Le choix $n_0 = \left\lceil \left(\frac{C\rho}{\sigma^3 \cdot 0,025} \right)^2 \right\rceil + 1$ convient donc. On peut déterminer une valeur approchée de n_0 à l'aide des

approximations précédentes : $\left(\frac{C\rho}{\sigma^3 \cdot 0,025} \right)^2 \approx \frac{400}{\lambda\delta}$. On prend donc $n_0 = \left\lceil \frac{400}{\lambda\delta} \right\rceil + 1 \approx 406107862$.

Avec ce choix de n_0 , il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B'_i - \alpha\right| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - (F_n(2) - F_n(-2)) + \mathbf{P}(Y_n^* = 2) \\ &= 1 - (F_n(2) - \Phi(2) + \Phi(2) - \Phi(-2) + \Phi(-2) - F_n(-2)) + \mathbf{P}(Y_n^* = 2) \\ &= 1 - (F_n(2) - \Phi(2)) - (\Phi(2) - \Phi(-2)) - (\Phi(-2) - F_n(-2)) + \mathbf{P}(Y_n^* = 2) \\ &\leq |F_n(2) - \Phi(2)| + |\Phi(2) - \Phi(-2)| + |\Phi(-2) - F_n(-2)| + |1 - (\Phi(-2) - F_n(-2))| + \mathbf{P}(Y_n^* = 2) \\ &= 0.025 + 0.025 + 0.05 + \mathbf{P}(Y_n^* = 2) = 0.055 + \mathbf{P}(Y_n^* = 2). \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{P}(Y_n^* = 2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, et que $0.055 < 1$, quitte à augmenter n_0 en un entier plus grand \tilde{n}_0 , nous avons

$$\forall n \geq \tilde{n}_0, \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B'_i - \alpha\right| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) < 0.1.$$

20 — Il suffit ensuite d'utiliser la formule déjà établie $\alpha\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B'_i - \alpha$. Plus précisément :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B'_i - \alpha\right| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}\right) = \mathbf{P}\left(|\alpha\varepsilon| \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}\right) = \mathbf{P}\left(|\varepsilon| \geq \frac{2\sigma}{\alpha\sqrt{N}}\right).$$

En utilisant les approximations de α et σ et la question précédente, on constate que pour $N \geq n_0$,

$$\mathbf{P}\left(|\varepsilon| \geq \frac{2\sqrt{\lambda\delta}}{\lambda\delta\sqrt{N}}\right) = \mathbf{P}\left(|\varepsilon| \geq \frac{2}{\sqrt{\lambda\delta N}}\right) < 0.1.$$

21 — Par passage au complémentaire :

$$\mathbf{P}\left(|\varepsilon| < \frac{2}{\sqrt{\lambda\delta N}}\right) > 0.9.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\lambda\delta N}} < 0,05 &\iff N > \frac{40^2}{\lambda\delta} \\ N_0 e^{-\lambda t} &> \frac{40^2}{\lambda\delta}, \\ t &< \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N_0 \lambda \delta}{40^2}\right) \approx 31140 \text{ ans.} \end{aligned}$$

Le N correspondant est alors $N = N_0 e^{-\lambda t} \approx 1,6 \cdot 10^9$.

22 — Oui, puisque $1,6 \cdot 10^9 > n_0 \approx 4 \cdot 10^8$. On est donc au-dessus de l'entier n_0 du théorème de BERRY-ESSEN, qui garantit qu'avec très forte probabilité l'erreur relative est en valeur absolue majorée par 0,05.