DEVOIR MAISON # 5
à rendre le Jeudi 30/01/2020

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.

Problème 1 ***Étude de la loi Gamma*** Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul et a, λ et λ' sont des réels strictement positifs.
Dans la partie I, on détermine l'ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale. Dans la partie II, on établit quelques propriétés remarquables de cette fonction et on en calcule des valeurs. Cette fonction est utilisée dans la partie III pour construire une densité de probabilité dont on constate qu'elle est en lien avec les lois de Poisson.

Partie I— Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale.

Soit Γ la fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}$ par : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$. Soit x un réel.

1 — 1.1. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x+1}$ et en déduire qu'il existe $T \in [1,+\infty[$ tel que :

$$\forall t \in [1,+\infty[, \quad t \geq T \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}.$$

1.2. Pour quelles valeurs de x, $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente?

2 — 2.1. Démontrer que $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$ et donner dans ce cas la valeur de cette intégrale.

2.2. En déduire que $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

3 — Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition de Γ.

Partie II— Quelques propriétés de cette fonction.

4 — 4.1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad \Gamma(x) > 0$.

4.2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

4.3. Calculer $\Gamma(1)$ puis démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$.

5 — On admet que Γ a une limite en 1, en 0^+ et en $+\infty$.

5.1. Déterminer ces trois limites.

5.2. Déterminer également $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x}$.

6 — 6.1. Rappeler la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

6.2. A l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera avec soin, démontrer que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

6.3. En déduire enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression de $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ à l'aide de factorielles.

Partie III— Une densité de probabilité.

On rappelle que a, λ et λ' sont des réels strictement positifs et on considère la fonction $f_{a,\lambda}$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_{a,\lambda} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^{a-1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

7 — **7.1.** Étudier la continuité de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbf{R}^\star$ et déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante, $f_{a,\lambda}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

7.2. Étudier les variations de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.

8 — **8.1.** Justifier que $f_{1,\lambda}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi que l'on précisera.

8.2. Plus généralement, montrer que $f_{a,\lambda}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

8.3. Quelle est alors une densité de la variable aléatoire $\dfrac{\lambda}{\lambda'}X$?

9 — Démontrer que : $\mathbf{E}(X) = \dfrac{a}{\lambda}$.

10 — On suppose dans cette dernière question que a est un entier naturel non nul et on note t un réel strictement positif, et Z désigne une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λt.

10.1. Démontrer que la fonction ci-dessous $F_{a,\lambda}$ est une primitive de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbf{R}^\star$:

$$\forall x \in \mathbf{R}^\star,\ F_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

10.2. En déduire $\mathbf{P}(X > t)$.

10.3. En déduire enfin que $\mathbf{P}(X > t) = \mathbf{P}(Z < a)$ en précisant le paramètre de la variable aléatoire Z.

Correction

Solution (Problème 1)

Partie I— Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale.

Soit Γ la fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}$ par :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$

Soit x un réel.

1 — 1.1. Si $x > -1$, par croissances comparées, on a :

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x+1} = 0.$$

Si $x \leq -1$, on a le même résultat par produit de limites. Comme $0 < 1$, on en déduit qu'il existe $T \in [1, +\infty[$ tel que :

$$\forall t \in [1, +\infty[,\ \ t \geq T \Rightarrow \mathrm{e}^{-t} t^{x+1} \leq 1.$$

Fixons t un élément de $[1, +\infty[$, comme $t^2 > 0$, on en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^{-t} t^{x+1} \leq 1 &\iff t^2 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leq 1 \\ &\iff e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

D'où la réponse à la première question.

1.2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[1;\infty]$. Soit A un réel strictement positif, on a :

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A}$$

De $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)$ existe et est finie. On peut donc affirmer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ sont deux fonctions continues et positives sur $[1;\infty]$ et on a vu qu'il existe $T \in [1, +\infty[$ tel que :

$$\forall t \in [1, +\infty[,\ \ t \geq T \Rightarrow \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}.$$

En utilisant le théorème de comparaison sur les intégrales généralisées à fonction positive et la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, on peut donc affirmer qu'il existe $T \in [1, +\infty[$ tel que $\displaystyle\int_T^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Rappelons que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est une fonction continue sur $[1;\infty]$ afin de conclure :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente pour tout réel } x.}$$

2 — 2.1. On suppose x non nul.

— $t \mapsto t^{x-1}$ est une fonction continue sur $]0,1]$.

— Soit A un réel strictement positif on a :

$$\begin{aligned} \int_A^1 t^{x-1} dt &= \left[\frac{t^x}{x}\right]_A^1 \\ &= \frac{1}{x} - \frac{A^x}{x} \end{aligned}$$

De $\displaystyle\lim_{A\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{A^x}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$, on en déduit que, pour tout réel non nul x, $\displaystyle\lim_{A\to 0^+}\left(\int_A^1 t^{x-1} dt\right)$ existe et est finie si et seulement si x est strictement positif.

On peut donc affirmer que, pour tout réel non nul x, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$. Au passage, pour tout réel strictement positif x, on a : $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$. De plus, si x est nul alors si A est un réel strictement positif, on a :

$$\int_A^1 t^{x-1} dt = -\ln(A)$$

et comme $\displaystyle\lim_{A\to 0^+}(-\ln(A)) = +\infty$, on peut affirmer que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ diverge si x est nul. On peut donc faire un bilan global :

$$\boxed{\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } x>0 \text{ et vaut } \frac{1}{x}.}$$

2.2. — Pour tout t de $]0,\ln(2)]$, on a :
$$\frac{1}{2} \leq \mathrm{e}^{-t} \leq \frac{3}{2}.$$
Par positivité de $t \mapsto t^{x-1}$ sur $]0,\ln(2)]$, on en déduit que pour tout t de $]0,\ln(2)]$, on a :
$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leq \frac{3t^{x-1}}{2}.$$

— Supposons x négatif. Comme $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{2}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ sont deux fonctions continues et positives sur $[0,1]$, en utilisant le théorème de comparaison sur les intégrales généralisées à fonction positive et la divergence de $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2}\,\mathrm{d}t$, conséquence de la divergence de $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ vue dans la question précédente, on peut donc affirmer que $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

— Supposons x strictement positif. Comme $t \mapsto \frac{3t^{x-1}}{2}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ sont deux fonctions continues et positives sur $[0,1]$, d'après le théorème de comparaison sur les intégrales généralisées à fonction positive et la convergence de $\int_0^1 \frac{3t^{x-1}}{2}\,\mathrm{d}t$, conséquence de la convergence de $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ vue dans la question précédente, on peut donc affirmer que $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

$$\boxed{\text{On prouvé que } \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } x>0.}$$

3 — $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est donc une intégrale généralisée uniquement à cause des bornes 0 et de $+\infty$. Par définition,
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ convergent.}$$
Or, dans les questions précédentes, on a vu que : $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout réel x. On en déduit donc que $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$.

On a donc prouvé que Γ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

Partie II— Quelques propriétés de cette fonction.

4 — **4.1.** La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est strictement positive continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$, donc $\boxed{\Gamma(x)>0}$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$.

4.2. Soit x un réel strictement positif. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$. Par intégration par parties, possible car $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, on a :
$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t &= [-e^{-t}t^x]_a^b + x\int_a^b e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\\ &= e^{-a}a^x - e^{-b}b^x + x\int_a^b e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
On réalise l'intégration par parties sur cet intervalle puisque l'intégrale est généralisée en zéro et en $+\infty$. On en déduit, comme $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t$ converge car x est supérieur à -1, que :
$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t &= \lim_{a\to 0}\left(\mathrm{e}^{-a}a^x - e^{-b}b^x + x\int_a^b e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= -e^{-b}b^x + x\int_0^b e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
puis, de nouveau car $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge, on a :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^x\,\mathrm{d}t &= \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}b^x + x\int_0^b e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ par somme, croissances comparées}\end{aligned}$$
Cela est précisément le résultat souhaité : $\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } x\text{, on a bien : } \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$

4.3. Comme 1 est un réel strictement positif, on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-1}\,\mathrm{d}t$ converge. On a alors :

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-1}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Pour tout n entier naturel non nul, on appelle $\mathscr{P}(n)$ l'hypothèse suivante : $\mathscr{P}(n)$: "$\Gamma(n)=(n-1)!$". Nous venons de voir que la propriété est vérifiée au rang $n=1$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n non nul. En appliquant la question précédente, comme n est non nul, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)\\ &= n(n-1)! \text{ d'après } \mathscr{P}(n)\\ &= n!\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(n)$ l'est. $\boxed{\text{On a donc prouvé que, pour tout entier naturel non nul } n,\ \Gamma(n)=(n-1)!.}$

5 — 5.1. On note L_1 la limite de Γ en 1, L_{0^+} la limite de Γ en 0^+ et $L_{+\infty}$ la limite de Γ en $+\infty$.

5.2. Pour tout entier naturel non nul n, on sait que $\Gamma(n)=(n-1)!$, donc par caractérisation séquentielle de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}(\Gamma(n)) = L_{+\infty}.$$

On en déduit que : $\boxed{L_{+\infty}=+\infty}$.

La fonction Γ est définie en 1. On admet que Γ a une limite en 1. On sait que si une fonction est définie en un point et a une limite alors cette limite est son image. On en déduit que $L_1=\Gamma(1)$ soit $\boxed{L_1=1}$ d'après la question précédente.

Reste à présent la limite en zéro.

Pour tout réel strictement positif x, on sait que : $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Ainsi $\lim_{x\to 0}(x\Gamma(x))$ existe et vaut L_1. Si L_{0^+} est un réel alors, par produit, $\lim_{x\to 0}(x\Gamma(x))$ est $0\times L_{0^+}$ soit 0. Or L_1 est non nul. On en déduit que L_{0^+} est $+\infty$ ou $-\infty$. Par positivité de Γ, on peut affirmer que $\boxed{L_{0^+}=+\infty}$.

6 — 6.1. Nous avons $\dfrac{\Gamma(x)}{x}=\dfrac{x-1}{x}\Gamma(x-1)$ pour tout $x>1$. Or $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1$ et (par composition) $\lim_{x\to+\infty}(\Gamma(x-1))=+\infty$.

Par produit, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\Gamma(x)}{x}\right)=+\infty.}$

On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ vaut $\sqrt{2\pi}$. Par parité de $x\mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x}{2}$.

On a donc prouvé : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \text{ existe et vaut } \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$

6.2. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. On va faire le changement de variable $y=\sqrt{2t}$ (on aura alors $t=\dfrac{y^2}{2}$ et $\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\sqrt{t}}=\mathrm{d}y$), $t\mapsto\sqrt{2t}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective, ce changement de variable est donc licite. De plus, $\lim_{t\to 0}\left(\sqrt{2t}\right)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{2t}\right)=+\infty$ et $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, on sait alors que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$ converge aussi et :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ d'apès la précédente question.}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a donc : } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.}$

6.3. Soit $n\in\mathbf{N}$. Nous avons montré que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Mais :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(2n-1)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^2}(2n-1)(2n-3)\left(n-\frac{3}{2}\right)\\ &= \cdots = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}\Gamma(1/2).\end{aligned}$$

On démontre donc, par récurrence, la formule suivante :

$$\boxed{\Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}}.$$

Partie III— Une densité de probabilité.

7 — 7.1. Comme $x \mapsto x$ ne s'annule pas $\mathbf{R}^\star$, $f_{a,\lambda}$ est continue par produit sur $\mathbf{R}^\star$. De plus, on a :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^{a-1}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Par produit, on en déduit aisément que :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f_{a,\lambda}(x)\right) = \begin{cases} \lambda & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a > 1, \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Comme $f_{a,\lambda}$ est nul sur $\mathbf{R}_-$ et λ est non nul, on peut donc affirmer :

$\boxed{f_{a,\lambda} \text{ est continue sur } \mathbf{R}^\star.\ f_{a,\lambda} \text{ est continue sur } \mathbf{R} \text{ si et seulement si } a > 1.}$

7.2. Par produit, $f_{a,\lambda}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$. Pour tout réel strictement positif x, on a :

$$f'_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^{a-2} \times \left(-\lambda x + a - 1\right).$$

La fonction $f_{a,\lambda}$ est donc croissante sur $\mathbf{R}_+^\star \cap \left]0, \dfrac{a-1}{\lambda}\right[$ et décroissante sur $\mathbf{R}_+^\star \cap \left[\dfrac{a-1}{\lambda}, +\infty\right[$.

Si $a > 1$ alors $\dfrac{a-1}{\lambda}$ est un réel strictement positif et le tableau de variations de $f_{a,\lambda}$ est le suivant :

x	0		$\frac{a-1}{\lambda}$		$+\infty$
Variations de $f_{a,\lambda}$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

La limite en $+\infty$ a été obtenue par croissances comparées. Si $0 < a \leq 1$ alors $\dfrac{a-1}{\lambda}$ n'est pas un réel strictement positif et le tableau de variations de $f_{a,\lambda}$ est le suivant :

x	0		$+\infty$
Variations de $f_{a,\lambda}$	$+\infty$	$\searrow$	0

La limite en $+\infty$ a été obtenue par produit.

8 — 8.1. On reconnaît dans ce cas une loi exponentielle de paramètre λ.

8.2. Par produit, on constate que $f_{a,\lambda}$ est une fonction définie et positive sur $\mathbf{R}$. De plus, elle est continue sur $\mathbf{R}$ sauf en un nombre fini de points (ici, 0 peut poser problème). Il reste à prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1 pour conclure.

Le changement de variable $t = \lambda x$ est licite (et donne $\mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{d}x$) car $x \mapsto \lambda\,\mathrm{d}x$ est une une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\lambda x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\lambda x) = +\infty$ et $\Gamma(a)$ converge, on sait alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}(\lambda x)^{a-1}\lambda\,\mathrm{d}x$ converge aussi et :

$$\begin{aligned}\Gamma(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}(\lambda x)^{a-1}\lambda\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x \lambda^a\end{aligned}$$

Comme $\Gamma(a)$ est non nul (car strictement positif), on obtient :

$$\frac{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{a-1} \lambda \, \mathrm{d}x \lambda^a}{\Gamma(a)} = 1$$

ce qui signifie précisément que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1. $\boxed{f_{a,\lambda} \text{ est bien une densité de probabilité .}}$

8.3. On pose $Y = \dfrac{\lambda}{\lambda'}X$. On note F_Y la fonction de répartition de Y et F_X celle de X. Pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) \\ &= P\left(\frac{\lambda}{\lambda'}X \leq t\right) \\ &= P\left(X \leq \frac{\lambda'}{\lambda}t\right) \text{ car } \frac{\lambda'}{\lambda} > 0 \\ &= F_X\left(\frac{\lambda'}{\lambda}t\right) \end{aligned}$$

Comme X est une variable à densité, F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et est de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Par composition, F_Y est continue sur $\mathbf{R}$ et est de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Y est donc une variable à densité et, comme F_X est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$, une densité de Y est donc :

$$f_Y \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} F_Y'(t) & \text{si} t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{array} \right. .$$

9 — Pour tout réel x, on a :

$$x f_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\Gamma(a)} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^a & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^a \, \mathrm{d}x \lambda^{a+1}.$$

et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^a \,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}}$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^a \,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \times \dfrac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}}$ soit $\dfrac{\Gamma(a+1)}{\lambda\Gamma(a)}$ soit $\dfrac{a}{\lambda}$. Par définition de $f_{a,\lambda}$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\dfrac{a}{\lambda}$. Donc

$\boxed{X \text{ admet une espérance, qui vaut } \dfrac{a}{\lambda}.}$

10 —10.1. Par somme et produit, $F_{a,\lambda}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$. Pour tout réel x strictement négatif, on a :

$$\begin{aligned} F'_{a,\lambda}(x) &= 0 \\ &= F_{a,\lambda}(x). \end{aligned}$$

La fonction $F_{a,\lambda}$ est donc une primitive de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbf{R}_-^\star$.
Pour l'autre cas, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} F'_{a,\lambda}(x) &= -\sum_{k=0}^{a-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(\frac{k(\lambda x)^{k-1}\lambda}{k!} - \lambda\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right) \\ &= -\sum_{k=0}^{a-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(\frac{k(\lambda x)^{k-1}\lambda}{k!} - \lambda\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{a-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(\frac{(\lambda x)^{k-1}\lambda}{(k-1)!} - \lambda\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right) + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Nous voyons que la somme est téléscopique. Il vient :

$$F'_{a,\lambda}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}\lambda\frac{(\lambda x)^{a-1}}{(a-1)!} - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} = f_{a,\lambda}(x).$$

$\boxed{\text{La fonction } F_{a,\lambda} \text{ est donc une primitive de } f_{a,\lambda} \text{ sur } \mathbf{R}_+^\star.}$

10.2. Attention, cela ne signifie pas pour autant que $F_{a,\lambda}$ est la fonction de répartition de X.

De manière générale : si $F'_{a,\lambda}(x) = f_{a,\lambda}(x)$ pour tout x sauf éventuellement en un nombre fini de points, **et** que $F_{a,\lambda}$ est la fonction de répartition de X, alors $f_{a,\lambda}$ est une densité de X et X est à densité. Mais par contre on ne sait pas encore ici que $F_{a,\lambda}$ est une fonction de répartition.

En effet, $F_{a,\lambda}$ est croissante sur $\mathbf{R}_+^\star$ (car sa dérivée sur $\mathbf{R}_+^\star$ est positive) et, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(F_{a,\lambda}(x)\right) = 0$ et, par somme, on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(F_{a,\lambda}(x)\right) = -1$ car, si x vaut 0, on a :

$$\begin{aligned} -\sum_{k=0}^{a-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda x} &= -1-\sum_{k=1}^{a-1}\frac{0^k}{k!} \\ &= -1. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout réel strictement positif x, on a : $-1 \le F_{a,\lambda}(x) \le 0$. La fonction $H_{a,\lambda}$ suivante est, en revanche, la fonction de répartition de X :

$$\forall x \in \mathbf{R}^\star,\ \ H_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} 1-\displaystyle\sum_{k=0}^{a-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

10.3. On a :

$$\begin{aligned} P(X>t) &= \int_t^{+\infty} f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(H_{a,\lambda}(x)\right) - H_{a,\lambda}(t) \\ &= -H_{a,\lambda}(t) \text{ par croissances comparées} \\ &= \sum_{k=0}^{a-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a } \mathbf{P}(X>t) = \sum_{k=0}^{a-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}.}$$

10.4. Supposons que Z suive une loi de Poisson de paramètre λt. Comme Z est à valeur entière, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z<a) &= \mathbf{P}(Z=0)+\mathbf{P}(Z=1)+\cdots+\mathbf{P}(Z=a-1) \\ &= \sum_{k=0}^{a-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t} \\ &= P(X>t) \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

D'où le résultat.