DEVOIR SURVEILLÉ # 6

le Vendredi 15/01/2021, 8h ⟶ 10h

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Problème 1 *Variable aléatoire définie par une intégrale* (Solution : 3)

1 — ***(Étude de deux fonctions)*** Soient $x \in \mathbf{R}$ et φ_x la fonction définie pour tout $t \in \mathbf{R}$ par :

$$\varphi_x(t) = \max(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leqslant x, \\ t & \text{si } t > x. \end{cases}$$

ainsi que

$$\Phi(x) = \int_0^1 \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.1) Donner une représentation graphique de φ_x.

1.2) Justifier que la fonction Φ est bien définie.

1.3) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1+x^2}{2} & \text{si } x \in]0,1[, \\ x & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1.4) Donner une représentation graphique de Φ.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose alors :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\,\mathrm{d}t = \Phi(X(\omega)) \quad \textit{i.e.} \quad Y = \Phi(X).$$

On admet dans la suite que Y est également une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

2 — Exprimer $Y(\Omega)$ en fonction de $X(\Omega)$ et de Φ.

3 — ***(Cas de la loi géométrique)*** Dans cette question, X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

3.1) Donner, sans justification $X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$ ainsi que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$ en cas d'existence.

3.2) Déterminer $Y(\Omega)$ puis la loi de Y.

4 — ***(Cas de la loi binômiale)*** Dans cette question, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ où $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

4.1) Donner, sans justification, $X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$ ainsi que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$ en cas d'existence.

4.2) Déterminer $Y(\Omega)$ puis la loi de Y.

5 — On suppose dans cette question que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1/2, 2\}$ et que :

$$\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \qquad \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{3}.$$

5.1) Calculer la valeur de $\mathbf{P}(X = 1/2)$.

5.2) Déterminer $Y(\Omega)$ et déterminer la loi de probabilité de Y puis calculer son espérance $\mathbf{E}(Y)$.

5.3) On note Z la variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé par $Z = XY$.
Justifier que $Z(\Omega) = \{-1/2, 0, 5/16, 4\}$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

5.4) ***(Ne traiter que si tout le reste a été fait)*** Calculer le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$ des deux variables aléatoires X et Y.

Problème 2 ***A-ENV TB, Étude d'une intégrale à bornes variables*** (Solution : 4) Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} =]0,\infty[$, on définit la fonction G_f de I dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{G}_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1 — 1.1) Montrer que la fonction G_f est dérivable sur I. *__Indication :__ On pourra introduire une primitive de la fonction intégrée.*

1.2) Déterminer G_f'.

2 — 2.1) On définit la fonction f_1 de I dans $\mathbf{R}$ par $f_1(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Déterminer la fonction $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_{f_1}$.

2.2) On définit la fonction f_2 de I dans $\mathbf{R}$ par $f_2(x) = \ln x$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Déterminer la fonction $\mathrm{G}_2 = \mathrm{G}_{f_2}$.

3 — Dans toute la suite du problème, H désignera la fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{H}(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3.1) Déterminer le signe de $\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3.2) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |\mathrm{H}(x)| \leqslant \ln(3)$.

4 — 4.1) Montrer que $\frac{\cos(t)}{t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + t\mathscr{E}(t)$ où $\mathscr{E}$ est une fonction définie sur I, de limite nulle en zéro.

4.2) Montrer que la fonction $\mathscr{E}$ est continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et prolongeable par continuité en une fonction continue sur $\mathbf{R}^+$.

4.3) En déduire que $\mathrm{H}(x)$ tend vers $\ln(3)$ quand $x \longrightarrow 0^+$.

Dans la suite, on notera h le prolongement par continuité de H à $]0,\infty[$ obtenu en posant $h(0) = \ln(3)$.

5 — Montrer que h est dérivable en zéro.

6 — 6.1) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a :

$$h(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

6.2) Montrer que $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}$ dt tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

6.3) En déduire $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$.

7 — Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction h est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante.

8 — Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$h\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-1)^{n+k} \frac{\cos(u)}{u + (k+n)\pi}\,\mathrm{d}u.$$

CORRECTION

Solution (problème 1) (Énoncé : 1)

1 — *(Étude de deux fonctions)*

1.1) Donner une représentation graphique de φ_x.

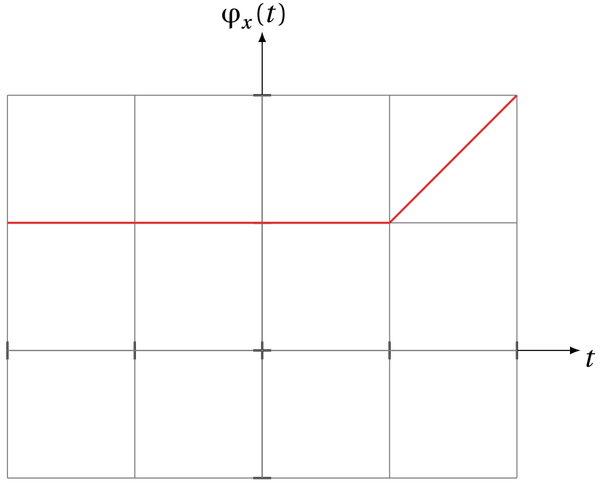

Fig. 6.1. : Graphe de φ_x pour $x = 1$

1.2) Puisque la fonction φ_x est continue pour tout x, la fonction Φ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

1.3) Soit $x \in \mathbf{R}$. On distingue les cas

- Si $x \leq 0$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
- Si $x \in]0,1[$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x x\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1+x^2}{2}$.
- Si $x > 1$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}t = x$

Donc :

$$\boxed{\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1+x^2}{2} & \text{si } x \in]0,1[, \\ x & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}}$$

1.4)

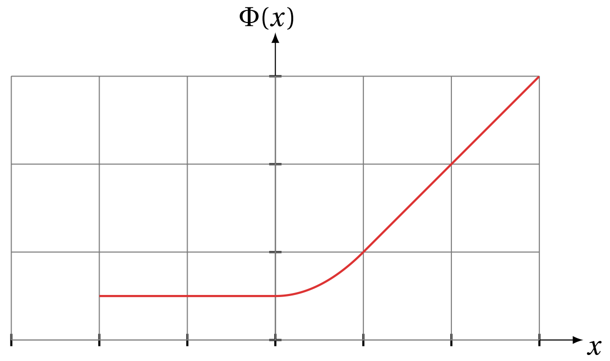

Fig. 6.2. : Graphe de Φ

2 — Puisque $Y = \Phi(X)$, nous avons $\boxed{Y(\Omega) = \Phi(X(\Omega))}$.

3 — *(Cas de la loi géométrique)*

3.1) Si X suit une loi géométrique de paramètre p, alors $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$ et $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ d'après le cours.

3.2) Puisque $X \geqslant 1$,

$$Y(\omega) = \Phi(X(\omega)) = X(\omega).$$

Les variables X et Y sont donc égales, *a fortiori* $\boxed{\text{elles ont même loi}}$, et $\boxed{Y(\Omega) = X(\Omega).}$

4 — *(Cas de la loi binomiale)*

4.1) On a $X(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus,

$$\mathbf{E}(X) = np \text{ et } \mathbf{Var}(X) = n\mathbf{P}1-p).$$

4.2) Comme $Y = \Phi(X)$, on a

$$Y(\Omega) = \Phi([\![0\,,\,n]\!]) = \boxed{\left\{\frac{1}{2}, 1, 2, \ldots, n\right\}}.$$

De plus

$$\boxed{\mathbf{P}(Y=1/2) = \mathbf{P}(X=0) = (1-p)^n} \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], \boxed{\mathbf{P}(Y=k) = \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}.$$

5 — On suppose dans cette question que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1/2, 2\}$ et que :

5.1) On a

$$\mathbf{P}(X=1/2) = 1 - \mathbf{P}(X=-1) - \mathbf{P}(X=0) - \mathbf{P}(X=2) = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

5.2) On a $Y(\Omega) = \{\Phi(-1), \Phi(0), \Phi(1/2), \Phi(2)\} = \boxed{\{1/2, 5/8, 2\}}$ et

$$\mathbf{P}(Y=1/2) = \mathbf{P}(X=-1) + \mathbf{P}(X=0) = \boxed{\frac{1}{4}},$$

$$\mathbf{P}(Y=5/8) = \mathbf{P}(X=1/2) = \boxed{\frac{5}{12}},$$

$$\mathbf{P}(Y=2) = \mathbf{P}(X=2) = \boxed{\frac{1}{3}},$$

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{5}{12}\frac{5}{8} + \frac{1}{3}2 = \boxed{\frac{101}{96}}.$$

5.3) Quand X vaut -1, Y vaut $1/2$ et Z vaut $-1/2$. On procède de même pour les trois autres valeurs et on trouve

$$\boxed{Z(\Omega) = \{-1/2, 0, 5/16, 4\}.}$$

$$\mathbf{P}(Z=-1/2) = \mathbf{P}(X=-1) = \frac{1}{8},$$

$$\mathbf{P}(Z=0) = \mathbf{P}(X=0) = \frac{1}{8},$$

$$\mathbf{P}(Z=5/16) = \mathbf{P}(X=1/2) = \frac{5}{12},$$

$$\mathbf{P}(Z=4) = \mathbf{P}(X=2) = \frac{1}{3}.$$

5.4) Par formule de König-Huygens, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Z) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

On a vu que $\mathbf{E}(Y) = 101/96$ et de même on a $\mathbf{E}(X) = 3/4$ et $\mathbf{E}(Z) = 269/192$. Ainsi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{235}{384}$$

Pour obtenir le coefficient de corrélation, on doit diviser par le produit des écarts type. On a

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{399}{256} - \left(\frac{101}{96}\right)^2 = \frac{4163}{9216}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}} = \boxed{\frac{235}{16652}\sqrt{4163}.}$$

Solution (problème 2) (Énoncé : 2) Soit f une fonction définie sur $I =]0, \infty[$, on définit la fonction G_f de I dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad G_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

1 — 1.1) Soit F une primitive de $t \in \mathrm{I} \longmapsto \frac{f(t)}{t}$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\mathrm{G}_f(x) = \mathrm{F}(3x) - \mathrm{F}(x),$$

donc $\boxed{\mathrm{G}_f \text{ est dérivable}}$ sur I en tant que composée et somme de telles fonctions.

1.2) Et, de plus, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\mathrm{G}_f'(x) = 3\mathrm{F}'(3x) - \mathrm{F}'(x) = \boxed{3\frac{f(3x)}{3x} - \frac{f(x)}{x}}.$$

2 — 2.1) Soit $x \in \mathrm{I}$. Alors

$$\mathrm{G}_1(x) = \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{3x}{x}\right) \boxed{= \ln 3.}$$

2.2) Soit $x \in \mathrm{I}$. Alors remarquons que

$$\frac{\ln t}{t} = \ln' t . \ln t$$

pour tout $t \in [\mathrm{X}, 3x]$. Alors

$$\mathrm{G}_2(x) = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_x^{3x} = \frac{1}{2}(\ln^2 3x - \ln^2 x) = \frac{1}{2}\left[(\ln x + \ln 3)^2 - \ln^2 x\right].$$

En développant et en simplifiant on trouve que :

$$\boxed{\mathrm{G}_2(x) = \ln 3 \ln x + \frac{1}{2}\ln^2 3}.$$

3 — Dans toute la suite du problème, H désignera la fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{H}(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3.1) On a $\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ puisque cos est positive sur $[\pi/6, \pi/2]$. Donc $\boxed{\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0.}$ On a $\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ puisque cos est négative sur $[\pi/2, 3\pi/2]$. Donc $\boxed{\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0.}$

3.2) Soit $x \in \mathrm{I}$. Alors puisque $x \leqslant 3x$,

$$|\mathrm{H}(x)| \leqslant \int_x^{3x} \left|\frac{\cos t}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}_1(x) = \ln 3.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \boxed{|\mathrm{H}(x)| \leqslant \ln(3)}.$$

4 — 4.1) Puisque cos est une fonction $\mathscr{C}^2$, d'après la formule de Taylor-Young, cos admet un développement limité à l'ordre deux, *i.e.* il existe une fonction $\mathscr{E} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2\mathscr{E}(t),$$

avec

$$\lim_{t \to 0} \mathscr{E}(t) = 0.$$

Donc en divisant par t, on obtient $\boxed{\frac{\cos(t)}{t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + t\mathscr{E}(t)}$ où $\mathscr{E}$ est une fonction définie sur I, de limite nulle en zéro.

4.2) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(t) &= \frac{1}{t}\left(\frac{\cos(t)}{t} - \frac{1}{t} + \frac{t}{2}\right)\\ &= \frac{\cos(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par propriété sur les quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction $\mathscr{E}$ est continue sur I, mais elle admet de plus une limite en zéro qui est nulle, donc elle $\boxed{\text{prolongeable par continuité en une fonction continue sur } \mathbf{R}^+.}$

4.3) Soit $x \in \mathrm{I}$. Intégrons la relation de 4.1 entre x et $3x$:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x) &= \int_x^{3x} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{2} + t\mathscr{E}(t)\right) \mathrm{d}t,\\ &= \mathrm{G}_1(x) - \frac{1}{2}\int_x^{3x} t\,\mathrm{d}t + \int_x^{3x} t\mathscr{E}(t)\,\mathrm{d}t,\\ &= \mathrm{G}_1(x) - 2x^2 + \int_x^{3x} t\mathscr{E}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a $G_1(x) \xrightarrow{x\to 0} \ln 3$.

En déduire que $H(x)$ tend vers $\ln(3)$ quand $x \longrightarrow 0^+$. La fonction $t \longmapsto t\mathscr{E}(t)$ est continue d'après les questions précédentes, il existe donc une primitive E. Ainsi,

$$\int_x^{3x} t\mathscr{E}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{E}(3x) - \mathrm{E}(x).$$

Or, E est continue car dérivable, donc

$$\lim_{x\to 0} (\mathrm{E}(3x) - \mathrm{E}(x)) = \lim_{x\to 0} \mathrm{E}(3x) - \lim_{x\to 0} \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(0) - \mathrm{E}(0) = 0.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} t\mathscr{E}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \mathrm{H}(x) = \ln 3.}$

Dans la suite, on notera h le prolongement par continuité de H à $]0,\infty[$ obtenu en posant $h(0) = \ln(3)$.

5 — On calcule le taux d'accroissement en zéro. Soit $x \in \mathrm{I}$, alors

$$\frac{h(x) - \ln 3}{x} = \frac{\mathrm{H}(x) - \ln 3}{x}$$

car $x > 0$. Enfin, on sait que

$$\mathrm{H}(x) = \ln 3 - 2x^2 + \int_x^{3x} t\mathscr{E}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{H}(x) - \ln 3}{x} &= -2x + \frac{1}{x}\int_x^{3x} t\mathscr{E}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -2x + \frac{\mathrm{E}(3x) - \mathrm{E}(x)}{x}\\ &= -2x + 3\frac{\mathrm{E}(3x) - \mathrm{E}(0)}{3x} - \frac{\mathrm{E}(x) - \mathrm{E}(0)}{x}.\end{aligned}$$

Puisque E est dérivable en 0, nous déduisons par composition des limites :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{H}(x) - \ln 3}{x} = 3\mathrm{E}'(0) - \mathrm{E}'(0) = \mathrm{E}'(0) = t\varepsilon(t)\big|_{t=0} = 0.$$

Donc $\boxed{h \text{ est dérivable en zéro de dérivée nulle.}}$

6 — 6.1) Soit $x \in \mathrm{I}$, on utilise une intégration par parties, aux fonctions $t \longmapsto \frac{1}{t}$ et sin qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

$$\begin{aligned}h(x) &= \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t + \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x},\\ &= \boxed{\frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.}\end{aligned}$$

6.2) D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad \left|\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t = \int_x^{3x} \frac{|\sin t|}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or, $x \leqslant 3x$, donc

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad \left|\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Mais

$$\int_x^{3x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{3x} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{3x}.$$

Donc $\boxed{\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ tend vers } 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$

6.3) Nous avons pour tout $x \in \mathrm{I}$, puisque $|\sin| \leqslant 1$,

$$-\frac{1}{3x} \leq \frac{\sin 3x}{3x} \leq \frac{1}{3x} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Donc par théorème d'encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Par combinaison linéaire de limites, et grâce à l'inégalité démontrée précédemment, on déduit

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.}$$

7 — On passe par la dérivée. Nous avons déjà établi que

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad h'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x} = \frac{-3\cos x \sin^2 x}{x},$$

en utilisant des formules de trigonométrie. En effet,

$$\begin{aligned}\cos 3x - \cos x &= \cos(2x + x) - \cos x \\ &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - \cos x \\ &= \left(1 - 2\sin^2 x\right)\cos x - 2\cos x \sin^2 x - \cos x \\ &= -3\cos x \sin^2 x.\end{aligned}$$

Donc le signe de h' est donné par l'opposé du signe du cos. Donc,

- h est croissante sur les intervalles du type $\left[(2n+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, pour $n \in \mathbf{N}$,
- et h est déroissante sur les intervalles du type $\left[2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, pour $n \in \mathbf{N}$.

8 — Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $\frac{2n+1}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi$, on déduit par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) &= \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{3\pi}{2}+3n\pi} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi+\pi} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi+\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi+2\pi} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \cdots \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi+(2n+1)\pi} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi+k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+n\pi+k\pi} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Posons ensuite pour $x \in \mathrm{I}$ et $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathrm{I}_{n,k}(x) = \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi+k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+n\pi+k\pi} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour arriver aux bornes de l'énoncé, faisons le changement de variable « $t = u + (k+n)\pi$ » dans l'intégrale précédente, licite car la fonction $t \longmapsto t + (k+n)\pi$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Alors

$$\mathrm{I}_{n,k}(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos(u + (k+n)\pi)}{u + (k+n)\pi}\,\mathrm{d}u.$$

Mais,

$$\forall a \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, \quad \cos(a + n\pi) = (-1)^n \cos a,$$

d'où l'on tire alors

$$\mathrm{I}_{n,k}(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-1)^{n+k} \frac{\cos u}{u + (k+n)\pi}\,\mathrm{d}u.$$

Donc :

$$\boxed{h\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-1)^{n+k} \frac{\cos(u)}{u + (k+n)\pi}\,\mathrm{d}u}.$$