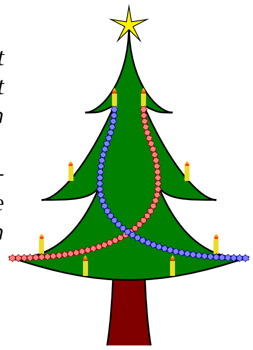
DEVOIR SURVEILLÉ # 4
le Samedi 14/12/2019, 2 heures

Consignes

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
L'usage de la calculatrice est interdit.



Problème 1 ***D'après concours G2E 2017*** Dans ce problème, on s'intéresse à un jeu télévisé dans lequel il s'agit de remporter plusieurs victoires consécutives pour gagner la « super cagnotte ».
La partie 1 est consacrée à la démonstration de quelques propriétés de deux séries très classiques. Un cas simple de ce jeu est étudié dans la partie 2 (indépendante de la partie 1). L'entier n désigne dans ce problème un entier naturel non nul. Par ailleurs, on rappelle que :

$$0,65 \leq \ln(2) \leq 0,7.$$

Partie I— Étude de deux séries réelles.

L'objectif de cette partie est d'étudier quelques propriétés des deux séries réelles de termes généraux $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k^2}$ (pour $k \in \mathbf{N}^*$). Les sommes partielles sont donc définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1— Rappeler sans justification la nature de ces deux séries.

2— **2.1.** Énoncer le théorème donnant la formule des accroissements finis (en particulier, on précisera avec soin les hypothèses de ce théorème).

2.2. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

2.3. En déduire un encadrement de $\frac{1}{k}$ pour tout entier $k \geqslant 2$ puis démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \ln(n+1) \leq \mathrm{A}_n \leq \ln(n) + 1.$$

2.4. En déduire enfin que : $\mathrm{A}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

3— On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\},\quad u_n = \mathrm{A}_{n-1} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \mathrm{A}_n - \ln(n).$$

3.1. Démontrer que $u_4 \geq 0,4$ et $v_4 \leq 0,8$.

3.2. Étudier les sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ et démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ convergent vers un même réel noté ℓ puis déterminer un encadrement de ℓ.

4— **4.1.** Démontrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\},\quad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}.$$

4.2. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\}$, $\frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{2}{k^2}$ et en déduire que la série de terme général $\frac{1}{k(k-1)}$ est convergente.

4.3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ et en déduire que $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est majorée par 2.

Partie II— Trois cadeaux.

Lors d'un jeu télévisé, le gagnant de la partie gagne le droit de faire tourner une roue sur laquelle se trouve une bille. La surface de cette roue est découpée en trois zones numérotées de 1 à 3 et ayant chacune la même aire. Lorsque la roue a cessé de tourner, la bille se trouve sur une zone qui rapporte chacune un cadeau différent. Si un candidat gagne plusieurs parties et remporte les trois différents cadeaux, il touche enfin la « super cagnotte ».
On suppose que les comportements de la roue et de la bille lors d'une victoire sont indépendants des résultats lors des victoires précédentes.

5— 5.1. Quelle est la probabilité que la zone sur laquelle se trouve la bille à l'issue de la première victoire soit la zone numéro 1 ?

5.2. Quelle est la probabilité que la zone sur laquelle se trouve la bille à l'issue de la seconde victoire ne soit pas la zone numéro 1 ?

6— 6.1. Quelle est la probabilité que la bille se trouve sur la zone numéro 1 au moins 3 fois en 4 victoires ?

6.2. Quelle est la probabilité que la bille se trouve sur deux zones distinctes atteintes exactement deux fois en 4 victoires ?

7— Déduire de ce qui précède que la probabilité que la « super cagnotte » ait été remportée en (au plus) 4 victoires est égale à $\frac{4}{9}$.

Partie III— n cadeaux.

On généralise l'étude de la partie précédente et on considère dorénavant que la surface de la roue est découpée en n zones de même aire. Ces zones sont numérotées de 1 à n.
De même que précédemment, si le candidat gagne les n différents cadeaux, il touche la « super cagnotte ». De plus, les comportements de la roue et de la bille lors d'une victoire sont toujours indépendants des résultats lors des victoires précédentes.
Pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, $i-1$ cadeau(x) différent(s) ayant déjà été gagné(s), on note T_i la variable aléatoire correspondant au nombre de victoire(s) supplémentaire(s) pour gagner un i-ème cadeau différent. Par exemple, si $n \geq 3$ et que les numéros des premières zones atteintes par la bille sont 2, 2, 2, 3, 1 alors :

— T_1 prend la valeur 1 (correspondant à la première victoire).

— T_2 prend la valeur 3 (correspondant aux seconde, troisième et quatrième victoires).

— T_3 prend la valeur 1 (correspondant à la cinquième victoire).

8— 8.1. Justifier que T_1 suit une loi certaine et que $\mathbf{E}(T_1) = 1$.

8.2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par T_2 ? Justifier que $\mathbf{P}(T_2 > 1) = \frac{1}{n}$.

9— 9.1. Démontrer que T_i suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

9.2. En déduire que :

$$\forall i \in [\![1\,,\,n]\!],\quad \mathbf{E}(T_i) = \frac{n}{n-i+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{Var}(T_i) = \frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}.$$

10— On note S_n la variable aléatoire correspondant au nombre de victoires nécessaires pour remporter la « super cagnotte ».

10.1. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

10.2. Déduire de ce qui précède (*cf.* partie I) que $\mathbf{E}(S_n) = nA_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

10.3. En déduire que $\mathbf{E}(S_{16}) \leq 61$.

11—11.1. Démontrer par récurrence que les variables aléatoires $(T_i)_{i\in[\![1\,,\,n]\!]}$ sont indépendantes.

11.2. En déduire $\mathbf{Var}(S_n)$ en fonction de A_n et B_n (*cf.* partie I) et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{Var}(S_n)$.

11.3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad \mathbf{Var}(S_n) \leq 2n^2.$$

12—12.1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad \forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*,\quad \mathbf{P}(|S_n - nA_n| \geq n\alpha) \leq \frac{2}{\alpha^2}.$$

12.2. En déduire, lorsque $n = 16$, un nombre suffisant de victoires pour remporter la « super cagnotte » avec une probabilité d'au moins 98 pour cent.

Correction

Solution (Problème 1)

Partie I— Étude de deux séries réelles.

1— La série (A_n) est divergente et la série (B_n) est convergente. Pour le justifier, refaire une comparaison série/intégrale.

2— 2.1. Théorème des accroissements finis. Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2.2. Soit $x > 0$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $f = \ln$ sur l'intervalle $[x, x+1]$:

$$\boxed{\exists c_x \in]x, x+1[: \ \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x)}.$$

D'où le résultat demandé puisque le fait que $c_x \in]x, x+1[\implies \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{x}$.

2.3. Soit $k \in \mathbf{N}$ avec $k \geq 2$. En appliquant la question précédente aux réels $x = k$ et $x = k-1$ on obtient :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

Par conséquent on a d'une part :

$$A_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) = 1 + \ln(n)$$

$$A_n \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$$

par téléscopage. Ainsi $\boxed{\ln(n+1) \leqslant A_n \leqslant \ln n + 1}$.

2.4. On a l'encadrement :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{A_n}{\ln(n)} \leq \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)}$$

et on remarque que :
- $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites,
- $\frac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations.

En conclusion le théorème des gendarmes nous donne $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{\ln(n)} = 1$ donc $\boxed{A_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)}$.

3— 3.1. On calcule :

$$A_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{16}, \quad A_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

En utilisant la donnée $\ln(2) \in [0,65; 0,7]$:

$$u_4 = A_3 - 2\ln(2) \geq \frac{11}{6} - \frac{14}{10} = \frac{26}{60} \geq \frac{24}{60} = 0,4$$

$$v_4 = A_4 - 2\ln(2) \geq \frac{25}{12} - \frac{13}{10} = \frac{47}{60} \leq \frac{48}{60} = 0,8.$$

3.2. On a pour tout $n \geq 2$:

$$u_{n+1} - u_n = A_n - A_{n-1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geq 0,$$

d'après la question 2.2. et de même :

$$v_{n+1} - v_n = A_{n+1} - A_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0.$$

Ainsi $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Comme par ailleurs $v_n - u_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\boxed{\text{ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers un même réel } \ell}$. D'après les monotonies de ces deux suites on a :

$$\forall n \geq 2,\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

Pour $n = 4$ la question 3.1 nous donne ainsi :

$$0,4 \leq \ell \leq 0,8.$$

4— 4.1. On a, par identification :

$$\left(\forall k \in \mathbf{N}^\star,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}\right) \Leftrightarrow \left(\forall k \in \mathbf{N}^\star,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{(a+b)k - a}{k(k-1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -a=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}}$$

4.2. Soit $k \in \mathbf{N}^\star \backslash \{1\}$. On a $k \geq 2$ donc $2(k-1) \geq k$ et en divisant par $k^2(k-1)$:

$$\frac{2}{k^2} \geq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Comme la série $\left(\sum \frac{2}{k^2}\right)_{k \geqslant 1}$ est convergente, par comparaison la série $\left(\sum \frac{1}{k(k-1)}\right)_{k \geqslant 2}$ l'est aussi.

4.3. On a par télescopage, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

donc en faisant tendre $n \to \infty$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1.$$

On remarque maintenant que pour $n \geq 2$:

$$\mathrm{B}_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

donc finalement $\boxed{\mathrm{B}_n \leq 1 + 1 = 2.}$

Partie II— Trois Cadeaux.

5— Notons X_k le numéro de la zone tirée après la k-ème victoire. L'énoncé dit que les variables aléatoires $(\mathrm{X}_k)_{k \in \mathbf{N}^\star}$ sont indépendantes et de même loi uniforme sur $\{1,2,3\}$.

5.1. Conséquence de l'énoncé : $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 1) = \frac{1}{3}}$.

5.2. On a $\quad \mathbf{P}(\mathrm{X}_2 \neq 1) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_2 = 2) + \mathbf{P}(\mathrm{X}_2 = 3) = \boxed{\frac{2}{3}}$.

6— 6.1. Notons N_i le nombre de fois que la zone i est tirée sur les 4 premières victoires. D'après les conditions de l'expérience, N_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4, 1/3)$ et ainsi :

$$\mathbf{P}(\mathrm{N}_1 \geq 3) = \mathbf{P}(\mathrm{N}_1 = 3) + \mathbf{P}(\mathrm{N}_1 = 4) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{2}{3} + \frac{1}{3}^4 = \frac{9}{81} = \boxed{\frac{1}{9}}.$$

6.2. Soit A l'évènement donné par l'énoncé. On modélise naturellement l'expérience par $\Omega = \{1,2,3\}^4$ avec la probabilité uniforme $\mathbf{P}$ sur Ω. On a alors

$$\#\,\mathrm{A} = \binom{3}{2} \times \binom{4}{2} = 18$$

Le premier coefficient binomial correspond au choix des numéros des 2 zones, le second au choix des 2 positions pour le premier numéro de zone choisi. Ainsi $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \boxed{\frac{18}{81}}$.

7— Soit C l'évènement de l'énoncé. On remarque que

$$\overline{\mathrm{C}} = \{\mathrm{N}_1 \geq 3\} \cup \{\mathrm{N}_2 \geq 3\} \cup \{\mathrm{N}_3 \geq 3\} \cup \mathrm{A}$$

Cette réunion étant disjointe,

$$\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(\overline{C}) = 1 - 3 \times \frac{9}{81} - \frac{18}{81} = \frac{36}{81} = \boxed{\frac{4}{9}}.$$

Partie III— n cadeaux.

On définit, pour $k \in \mathbf{N}^\star$, la variable X_k égale au numéro du cadeau tiré à la k-ème victoire.

8— 8.1. Le premier cadeau n'a évidemment pas été tiré auparavant donc par définition de T_j on a $\boxed{T_1 = 1 \text{ de manière certaine}}$. Autrement dit $\mathbf{P}(T_1 = 1) = 1$ et par conséquent $\mathbf{E}(T_1) = 1 \times \mathbf{P}(T_1 = 1) = 1$.

8.2. T_2 peut valoir n'importe quel nombre entier naturel non nul : $\boxed{T_2(\Omega) = \mathbf{N}^\star}$. On a $\{T_2 > 1\} = \{X_2 = X_1\}$ donc

$$\mathbf{P}(T_2 > 1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{1}{n}}.$$

9— 9.1. T_i correspond au nombre de tentatives nécessaires pour tirer un des cadeaux faisant partie des $n - (i-1)$ cadeaux non déjà tirés. Les tirages étant indépendants, il s'agit donc d'un schéma géométrique et on peut affirmer que $\boxed{T_i \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{n-i+1}{n}}$.

9.2. On rappelle qu'une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$ a pour espérance $1/p$ et pour variance $(1-p)/p^2$. D'après la question précédente on a donc :

$$\mathbf{E}(T_i) = \frac{n}{n-i+1}, \quad \mathbf{Var}(T_i) = \frac{(i-1)/n}{((n-i+1)/n)^2} = \boxed{\frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}}.$$

10—10.1. Pour obtenir le nombre total de victoires jusqu'à la super cagnotte, on peut décomposer en faisant la somme, pour i allant de 1 à n, des nombres de victoires entre le $(i-1)-me$ cadeau nouveau et le i-ème cadeau nouveau. Ainsi :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

10.2. Par linéarité de l'espérance on en déduit que :

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(T_i) = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1}.$$

En posant $j = n + 1 - i$ dans cette somme on a alors :

$$\boxed{\mathbf{E}(S_n) = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = nA_n}.$$

10.3. D'après la question A.2.3, on a

$$\mathbf{E}(S_{16}) \leq 16(1 + \ln(16)) = 16(1 + 4\ln(2)) \leq 16(1 + 4 \times \frac{7}{10}) = \frac{608}{10} \leq \boxed{61}.$$

11—11.1. On montre par récurrence sur j que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la famille $(T_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ est indépendante.
Ce résultat est évident pour $j = 1$. Supposons maintenant que la famille $(T_1, \ldots, T_j)$ est indépendante pour un certain j. Alors, sachant $\{T_1 = t_1, \ldots, T_j = t_j\}$ $(t_1, \ldots, t_j \in \mathbf{N}^\star$ fixés), la variable T_{j+1} suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-j}{n}$ car on reconnaît un schéma géométrique. Ainsi pour tout $t_{k+1} \in \mathbf{N}^\star$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{j+1} = t_{j+1}) \\
&\qquad = \mathbf{P}(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_j = t_j)\mathbf{P}(T_{j+1} = t_{j+1} | T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_j = t_j) \\
&\qquad = \mathbf{P}(T_1 = t_1)\mathbf{P}(T_2 = t_2)\ldots\mathbf{P}(T_j = t_j)\mathbf{P}(T_{j+1} = t_{j+1})
\end{aligned}$$

puis T_{j+1} a pour loi une loi géométrique de paramètre $\frac{n-j}{n}$ d'après une question précédente. $\boxed{\text{Donc les } T_i \text{ sont indépendantes.}}$

11.2. Les variables T_i étant indépendantes on a donc :

$$\mathbf{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Var}(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}$$

et à nouveau avec le changement de variable $j = n+1-i$ on obtient :

$$\mathbf{Var}(S_n) = n\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{j^2} = n^2 B_n - nA_n.$$

On remarque que $\mathbf{Var}(S_n) = n^2(B_n - A_n/n)$ or
- $\lim_{n\to\infty} A_n/n = 0$ puisque $A_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$,
- $\lim_{n\to\infty} B_n > 0$.

Par opérations sur les limites on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbf{Var}(S_n) = +\infty}.$$

11.3. D'après la question I.4.3, on a

$$\mathbf{Var}(S_n) \leq 2n^2 - nA_n \leq \boxed{2n^2}.$$

12—12.1. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable S_n (qui possède bien un moment d'ordre 2), on a :

$$\mathbf{P}(|S_n - nA_n| \geq n\alpha) = \mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}S_n| \geq n\alpha) \leq \frac{\mathbf{Var}(S_n)}{n^2\alpha^2} \leq \frac{2n^2}{n^2\alpha^2} = \boxed{\frac{2}{\alpha^2}}.$$

12.2. On remarque que $\{S_n \geq n\alpha + nA_n\} \subset \{|S_n - nA_n| \geq n\alpha\}$ donc :

$$\mathbf{P}(S_n \geq n\alpha + nA_n) \leq \mathbf{P}(|S_n - nA_n| \geq n\alpha) \leq \frac{2}{\alpha^2}$$

Par complémentaire,

$$\mathbf{P}(S_n < n\alpha + nA_n) \geq 1 - \frac{2}{\alpha^2}$$

On résout : $1 - 2/\alpha^2 = 0,98 \Leftrightarrow 1/\alpha^2 = 0,01 \Leftrightarrow \alpha = 10$. On choisit donc $\alpha = 10$ et ainsi :

$$\mathbf{P}(S_{16} < 160 + 16A_{16}) \geq 0,98.$$

A fortiori, puisque $16A_{16} \leq 61$, on a :

$$\mathbf{P}(S_{16} \leq 160 + 60)\mathbf{P}(S_{16} < 160 + 61) \geq \mathbf{P}(S_{16} < 160 + 16A_{16}) \geq 0,98.$$

$\boxed{\text{Le nombre de victoires demandé est donc 220.}}$