

# DEVOIR SURVEILLÉ # 3

## le Samedi 16/11/2019, 3 heures

### Consignes

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.




- [Sol 1] **Exercice 1** *Modèle de combat de Lanchester* On considère une situation de combat entre d'une part des tanks, en nombre  $x(t)$  au temps  $t$ , et d'autre part des armes anti-tanks en nombre  $y(t)$ . On suppose que sur un petit intervalle de temps, la diminution du nombre de tanks est proportionnelle au nombre d'éléments anti-tanks. De-même pour la diminution du nombre d'armes anti-tanks.
- 1— Justifier, en s'appuyant sur l'énoncé, que  $x, y$  sont solutions du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = -ay, \\ y' = -bx, \end{cases} \quad \text{avec } a, b > 0. \quad (\text{SDLanch})$$

Le système précédent constitue le *modèle de combat de Lanchester*, ainsi nommé d'après F.W. Lanchester, qui a étudié les combats aériens pendant la première guerre mondiale.

- 2— (**Méthode Numérique**) On rappelle que la méthode d'Euler d'approximation d'une solution de l'équation différentielle  $z'(t) = f(t, z(t))$  sur un intervalle  $[0, \tau]$  consiste à subdiviser l'intervalle  $[0; \tau]$  de manière uniforme à l'aide de  $N + 1$  points espacés d'un pas de  $h = \frac{\tau}{N}$ , puis à approcher la dérivée par le taux d'accroissement :  $z'(t) \approx \frac{z(t+h) - z(t)}{h}$ , et de construire ainsi la suite récurrente  $z_{i+1} = z_i + f(t_i, z_i)$  où  $z_0$  est donné par la condition initiale. Nous allons utiliser cette méthode pour approcher les solutions de (SDLanch).

2.1. Sur le même principe que rappelé précédemment, former les deux suites récurrentes associées aux deux équations qui constituent (SDLanch). On notera  $(x_i)_{i=0}^N$  (resp.  $(y_i)_{i=0}^N$ ) la suite approchant  $x$  (resp.  $y$ ).

2.2.  En déduire une fonction Python d'en-tête `Euler_dimension2(a, b, x0, y0, tau, N)` qui prend en argument les paramètres du système, et renvoie deux tableaux numpy :

— le premier contenant  $x_0, \dots, x_N$ ,

— le second contenant  $y_0, \dots, y_N$ .


2.3.  En déduire quelques commandes permettant de tracer la solution approchée obtenue.

- 3— (**Solution explicite**) On notera dans la suite  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

3.1. Justifier que l'on peut dériver les deux équations différentielles de (SDLanch).

3.2. En déduire que  $y$  est solution d'une équation différentielle d'ordre deux, là résoudre, en déduire une expression de  $x$  et montrer finalement que :

$$\begin{cases} y(t) = y(0) \text{ch}(\sqrt{abt}) - x(0) \sqrt{\frac{b}{a}} \text{sh}(\sqrt{abt}), \\ x(t) = x(0) \text{ch}(\sqrt{abt}) - y(0) \sqrt{\frac{a}{b}} \text{sh}(\sqrt{abt}). \end{cases} \quad (3.1)$$

3.3.  Proposer alors un script Python permettant de tracer la solution exacte  $t \mapsto (x(t), y(t))$  sur  $[0, 10]$ .

■ **Problème 1** Étude d'une série de terme général un produit dont un terme est télescopique, transformation d'Abel.

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  une suite de réels. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

- 1— On suppose, dans cette question, que pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ .
- 1.1. vérifier que  $(\sum_{n \geq 1} a_n)$  converge et calculer sa somme.
  - 1.2. Rappeler pour tout  $x \in \mathbf{R}^+$  la nature de la série  $(\sum_{n \geq 1} nx^{n-1})$ .
  - 1.3. Montrer que la série  $(\sum_{n \geq 1} b_n)$  converge et calculer sa somme.
- 2— On suppose, dans cette question, que  $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ ,  $n \geq 2$ , et  $a_1 = 0$ .
- 2.1. Étudier la monotonie et la convergence de la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$ .
  - 2.2. Déterminer la nature de la série  $(\sum_{n \geq 1} a_n)$ . Indication : On pourra effectuer une comparaison série intégrale.
  - 2.3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n$ .
  - 2.4. Quelle est la nature de la série  $(\sum_{n \geq 1} b_n)$ ? Indication : On pourra d'abord chercher un équivalent de  $(b_n)$ .
- 3— (**Transformation d'Abel** —) on suppose dans cette question que la série  $(\sum_{n \geq 1} a_n)$  converge et que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  est une suite décroissante de réels positifs.
- 3.1. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$ . Montrer que :  $\forall n \in \mathbf{N}^*, na_{2n} \leq u_n$ .
  - 3.2. En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_{2n} = 0$ .
  - 3.3. Démontrer alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ . Indication : On pourra considérer les sous-suites des termes pairs et impairs..
  - 3.4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $B_n = A_n - na_{n+1}$ . Indication : On pourra séparer en deux parties le terme  $B_n$  puis utiliser un changement de variable..  
En déduire que la série  $(\sum_{n \geq 1} b_n)$  converge.
  - 3.5. A-t-on  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ?
- 4— On suppose dans cette question que la série  $(\sum_{n \geq 1} b_n)$  converge et que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  est positive, décroissante et de limite nulle.
- 4.1. (**Cours**) Rappeler l'énoncé du critère de comparaison des séries à termes positifs.
  - 4.2. Montrer que :  $\forall m \in \mathbf{N}^*, m \leq n, B_n \geq A_m - ma_{n+1}$ .
  - 4.3. En déduire que  $(\sum_{n \geq 1} a_n)$  converge.
  - 4.4. Peut-on en déduire que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ?

■ **Problème 2** Une première utilisation des séries en probabilités.

**Partie I — Un calcul de somme.**

Soit  $x \in ]0; 1[$ . Pour tout couple  $(n, k)$  de  $\mathbf{N}^2$ , on pose :  $S_{n,k} = \sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k} x^i$ .

- 1—
- 1.1. Calculer, pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ , la somme  $S_{n,0}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n,0}$ .
  - 1.2. Montrer que :  $\forall (i, k) \in (\mathbf{N}^*)^2, \binom{k+i}{k} - \binom{k+i-1}{k} = \binom{k+i-1}{k-1}$ .
  - 1.3. En déduire :  $\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}^*, (1-x)S_{n,k} = S_{n,k-1} - \binom{k+n}{k} x^{n+1}$ .
- 2— Soit  $k \in \mathbf{N}$ . Déterminer la limite de  $n^k x^n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- 3— Montrer que considérant  $k$  fixé,  $\binom{k+n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ , puis en déduire la limite de  $\binom{k+n}{k} x^{n+1}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- 4— En raisonnant par récurrence sur  $k$ , montrer que :  $\forall k \in \mathbf{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n,k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ .
- 5— En déduire que, pour tout  $k$  de  $\mathbf{N}$ , la série  $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$  converge et que l'on a :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

- 6— Quel résultat retrouve-t-on pour  $k = 1$ ? Pour  $k = 2$ ?

Dans la suite vous pourrez utiliser les résultats précédents même s'ils n'ont pas été établis.

### Partie II — Étude d'une expérience aléatoire.

On dispose d'une pièce de monnaie amenant pile avec une probabilité  $p$  ( $p \in ]0; 1[$ ). On lance cette pièce un nombre aléatoire de fois, voire pas du tout. Les lancers sont supposés indépendants, à chaque pile obtenu on gagne 1 euro. Pour tous  $n$  et  $k$  de  $\mathbf{N}$ , on définit les événements :  $L_n$  « on lance exactement  $n$  fois la pièce » et  $G_k$  « on gagne exactement  $k$  euros ». On pose  $u_n = \mathbf{P}(L_n)$  (probabilité de l'évènement  $L_n$ ). On fixe dans la suite  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé décrivant cette expérience aléatoire, où  $\mathcal{T}$  est une tribu contenant au moins les évènements ci-dessus.

On admet que si la série  $\left(\sum_{k \geq 0} k \mathbf{P}(G_k)\right)$  converge, alors la somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbf{P}(G_k)$  représente le gain moyen obtenu, i.e. l'espérance du gain.

- 7— Justifier que la famille  $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est un système complet d'évènements. Qu'en déduire pour la série  $\left(\sum_{n \geq 0} u_n\right)$  et la somme de cette série?

- 8— 8.1. Calculer pour tout  $(k, n) \in \mathbf{N}^2$ , la probabilité conditionnelle  $\mathbf{P}(G_k | L_n)$ . *Indication :* On distinguera les cas  $k > n$  et  $k \leq n$ .

- 8.2. En déduire, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , que  $\mathbf{P}(G_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} u_n$ . On justifiera soigneusement cette relation qui pourra être utilisée librement dans la suite du problème.

- 9— Soit  $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$ . Dans cette question, on suppose que, pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $u_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ .

- 9.1. Vérifier que :  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$ .

- 9.2. Montrer que, pour tout entier naturel  $k$ ,  $\mathbf{P}(G_k) = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n (1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$ .

- 9.3. En déduire que :  $\mathbf{P}(G_k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$ .

- 9.4. Justifier la convergence de la série  $\left(\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(G_k)\right)$  et calculer sa somme. Qu'en déduit-on pour la famille  $(G_k)_{k \in \mathbf{N}}$ ?

- 9.5. Justifier la convergence de la série  $\left(\sum_{k \geq 0} k \mathbf{P}(G_k)\right)$  et calculer le gain moyen.

- 10— Dans cette question, on suppose que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = q^{n-1} p$  avec  $q = 1 - p$ .

- 10.1. Vérifier que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$ . Calculer alors la probabilité  $u_0$  de ne pas tirer la pièce.

- 10.2. Calculer  $\mathbf{P}(G_0)$ .

- 10.3. En utilisant la partie 1, montrer que : pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $\mathbf{P}(G_k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$ .

- 10.4. Justifier la convergence de la série  $\left(\sum_{k \geq 0} k \mathbf{P}(G_k)\right)$  et calculer le gain moyen.

## Correction

### ■ Solution (Exercice 1)

1— Puisque  $y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ , un accroissement s'interprète comme un nombre dérivé. Ainsi, puisque la diminution du nombre de tanks est proportionnelle au nombre d'anti-tanks, elle est de la forme  $-ay$  avec  $a > 0$ . D'où  $x' = -ay$ . De la même manière, on établit qu'il existe  $b > 0$  tel que :  $y' = -bx$ .

D'où le système (SDLanch).

2— 2.1. On note  $x_0 = x(0)$  et  $y_0 = y(0)$ . Alors en approchant le nombre dérivé par le taux, on souhaite construire les deux suites :

$$x_{i+1} = x_i - ay_i, \quad y_{i+1} = y_i - bx_i.$$

Ce sont deux suites récurrentes linéaires couplées.

2.2.

```

1 def Euler_dimension2(a, b, x0, y0, tau, N):
2     '''
3     -> tableaux numpy contenant les suites x,y
4     '''
5     h = tau/N
6     X = np.zeros(N+1)
7     Y = np.zeros(N+1)
8     X[0] = x0
9     Y[0] = y0
10    for k in range(N):
11        X[k+1] = X[k] - a*Y[k]
12        Y[k+1] = Y[k] - b*X[k]
13    return X,Y

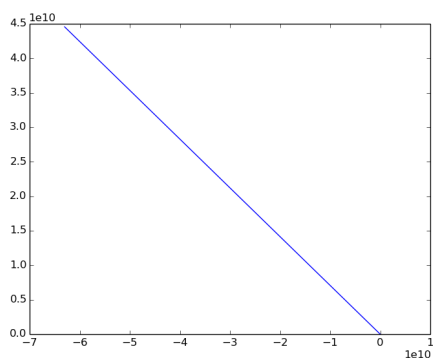
```

2.3. On peut ensuite tracer :

```

1 X = Euler_dimension2(2, 1, 1, 1, 10, 30)[0]
2 Y = Euler_dimension2(2, 1, 1, 1, 10, 30)[1]
3 plt.plot(X,Y)
1 plt.show()

```



3— 3.1. Puisque  $x, y$  sont dérivables, on a immédiatement que  $x', y'$  le sont aussi. Donc on peut dériver chacune des équations différentielles, on obtient :  $x'' = -ay'$ ,  $y'' = -bx'$ .

3.2. Donc  $y'' = -b(-ay) = aby$ . L'équation caractéristique est donc  $x^2 - ab = 0$  donc les solutions données par :

$$y(t) = Ae^{\sqrt{abt}} + Be^{-\sqrt{abt}}, \quad A, B \in \mathbf{R}.$$

Donc :  $x(t) = \frac{-1}{b}y'(t) = \frac{-1}{b} \left( A\sqrt{ab}e^{\sqrt{ab}t} - B\sqrt{ab}e^{-\sqrt{ab}t} \right)$  pour tout  $t$ . Finalement :

$$\begin{cases} x(t) = -A\sqrt{\frac{a}{b}}e^{\sqrt{ab}t} + B\sqrt{\frac{a}{b}}e^{-\sqrt{ab}t}, \\ y(t) = Ae^{\sqrt{ab}t} + Be^{-\sqrt{ab}t}. \end{cases}$$

Inversement, on vérifie que toutes ces fonctions sont des solutions.  
Il reste à tenir compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{b}{a}}x(0) = -A + B, \\ y(0) = A + B, \end{cases} \implies B = \frac{1}{2} \left( y(0) + \sqrt{\frac{b}{a}}x(0) \right), \quad A = \frac{1}{2} \left( y(0) - \sqrt{\frac{b}{a}}x(0) \right).$$

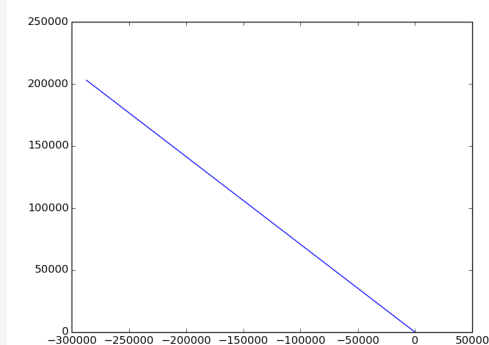
En injectant dans les expressions de  $x, y$ , on trouve l'expression donnée par l'énoncé.

### 3.3.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 T = np.linspace(0, 10, 100)
3 x0 = 1
4 y0 = 1
5 a = 2
6 b = 1
7 X =
8   ↪ (x0/2)*(np.exp(np.sqrt(a*b)*T)+np.exp(-np.sqrt(a*b)*T))-(y0/2)*np.sqrt(a/b)*(np.exp(np.s
9 Y =
10  ↪ (y0/2)*(np.exp(np.sqrt(a*b)*T)+np.exp(-np.sqrt(a*b)*T))-(x0/2)*np.sqrt(b/a)*(np.exp(np.s
11 plt.plot(X, Y)
12 plt.show()

```



### ■ Solution (Problème 1)

1— 1.1. La série proposée est géométrique de raison  $1/2 \in ]-1, 1[$  et donc convergente. On a pour tout entier  $n \leq 1$  :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

On en déduit que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2$ . Donc  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$ .

1.2. — Si  $x > 1$  alors  $nx^{n-1} \rightarrow +\infty$  ce qui montre que la série ne converge pas pour  $x > 1$ .

— Si  $x \in [0, 1[$ , alors par croissance comparée  $n^3 x^{n-1} \rightarrow 0$ , donc pour  $n$  assez grand,  $nx^{n-1} \leq \frac{K}{n^2}$  avec  $K \in \mathbf{R}^+$ . Ainsi, puisque l'on compare des séries à termes positifs,  $\left( \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} \right)_{n \geq 1}$  converge.

Finalement,  $\left( \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} \right)_{n \geq 1}$  converge si et seulement si  $x \in [0, 1[$ .

- 1.3. On a  $b_n = n \left( \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} n \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$ . Comme  $1/2 \in ]-1, 1[$ , la question précédente montre que  $\sum b_n$  converge. Le théorème du cours donnant la somme des séries dérivées géométriques donne :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-1/2)^2} = 2$$

- 2— 2.1.  $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et

$$\forall x > 1, f'(x) = -\frac{1 + \ln(x)}{(x \ln(x))^2} \leq 0$$

$f$  est donc décroissante sur  $]1, +\infty[$  (on aurait aussi pu montrer que si  $x \leq y$  alors  $f(x) \geq f(y)$  en utilisant la croissance de  $\ln$  et la décroissance du passage à l'inverse sur  $\mathbf{R}^{+*}$ ).

On en déduit immédiatement que  $(a_n)_{n \geq 2}$  est décroissante. Elle est de limite nulle par théorèmes d'opération.

- 2.2.  $f$  étant décroissante, on peut utiliser une comparaison série-intégrale. On a

$$\forall k \geq 3, \int_k^{k+1} f(t) dt \leq a_k = f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

En sommant (et comme  $a_1 = 0$ ) la relation de Chasles donne

$$\forall n \geq 2, a_2 + \int_3^{n+1} f(t) dt \leq A_n \leq a_2 + \int_2^n f(t) dt$$

Une primitive de  $f$  sur  $]1, +\infty[$  est  $t \mapsto \ln(\ln(t))$  et on a donc

$$\forall n \geq 2, a_2 + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq A_n$$

La minorant étant de limite  $+\infty$ , il en est de même de  $A_n$  et  $\sum_{n \geq 1} a_n$  diverge.

- 2.3.  $na_n = \frac{1}{\ln(n)}$  si  $n \geq 2$ . On a donc directement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$$

- 2.4. On a

$$b_n = \frac{(n+1) \ln(n+1) - n \ln(n)}{(n+1) \ln(n) \ln(n+1)}$$

On écrit que

$$\begin{aligned} (n+1) \ln(n+1) &= (n+1) (\ln(n) + \ln(1 + 1/n)) \\ &= (n+1) \ln(n) + (n+1) \left( \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= n \ln(n) + \ln(n) + o(\ln(n)) \end{aligned}$$

Ainsi,  $(n+1) \ln(n+1) - n \ln(n) \sim \ln(n)$  et donc

$$b_n \sim \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} = a_{n+1}$$

$\sum (b_n)$  est ainsi une série divergente (positive et équivalente à une série divergente).

- 3— 3.1. Dans la somme définissant  $u_n$ , il y a  $n$  termes. Par décroissance de  $(a_k)$ , le plus petit d'entre eux est  $a_{2n}$ . On a donc  $na_{2n} \leq u_n$ .

3.2. On a  $u_n = A_{2n} - A_n$  et comme  $(A_n)$  converge (suite des sommes partielles de la série convergente  $\sum (a_n)$ ) on en déduit que  $u_n \rightarrow 0$ . L'encadrement  $0 \leq na_{2n} \leq u_n$  prouve alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na_{2n} = 0.$$

3.3. Posons  $c_n = na_n$ . On a  $c_{2n} = 2(na_{2n}) \rightarrow 0$ . De plus

$$0 \leq c_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = c_{2n} + a_{2n+1}$$

Comme  $\sum (a_k)$  converge,  $a_k \rightarrow 0$ . Le majorant ci-dessus est de limite nulle et, par théorème d'encadrement,  $c_{2n+1} \rightarrow 0$ . Du résultat sur les extraites de rang pair et impair, on déduit que  $c_n \rightarrow 0$ , c'est à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0.$$

3.4. On revient aux sommes partielles.

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^n k a_k - \sum_{k=1}^n k a_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n k a_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) a_k \\ &= a_1 + \sum_{k=2}^n (k - (k-1)) a_k - n a_{n+1} \\ &= A_n - n a_{n+1} \end{aligned}$$

Les trois termes du membre de droite admettant une limite finie quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $(B_n)$  converge

et donc  $\sum_{n \geq 1} b_n$  converge.

3.5. Un passage à la limite dans l'identité précédente donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

4— 4.1. Voir cours.

4.2. Reprenons l'identité de la question précédente (on s'est donné  $1 \leq m \leq n$ )

$$B_n = A_n + n a_{n+1} = A_m + \sum_{k=m+1}^n a_k + n a_{n+1}$$

Dans la somme, il y a  $n - m$  termes tous plus grand que  $a_n$  et donc aussi que  $a_{n+1}$ . On en déduit que

$$B_n \geq A_m + (n - m) a_{n+1} + n a_{n+1} = A_m - m a_{n+1}$$

4.3. Fixons  $m \in \mathbf{N}^*$  et faisons tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'inégalité précédente (les limites existent) :

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq A_m$$

Ceci montre que  $(A_m)$  est une suite bornée. Comme elle croît (car les  $a_k$  sont  $\geq 0$ ), elle converge.

Ainsi,  $\sum a_k$  converge.

4.4. On est alors ramené à la partie précédente et on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

### ■ Solution (Problème 1)

#### Partie I— Partie 1..

1— 1.1. Soit  $n \in \mathbf{N}$ , alors  $S_{n,0} = \sum_{i=0}^n \binom{0+i}{0} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  d'après la formule de sommation de termes géométriques. Faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient ensuite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,0} = \frac{1}{1-x}$$

puisque  $x \in ]0; 1[$ .

1.2. C'est une conséquence directe de la formule de Pascal qui nous dit que pour tout entier  $K, N$  on a :

$$\binom{N+1}{K+1} = \binom{N}{K} + \binom{N}{K+1}. \text{ On fait ensuite } N = k+i-1 \text{ et } K = k-1.$$

1.3. Soient  $n \in \mathbf{N}$  et  $k \in \mathbf{N}^*$ . Alors

$$\begin{aligned} (1-x)S_{n,k} &= (1-x) \sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k} x^i = \sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k} x^i - \sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k} x^{i+1} = \sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k} x^i - \sum_{i=1}^{n+1} \binom{k+i-1}{k} x^i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \binom{k+i}{k} - \binom{k+i-1}{k} \right) x^i + 1 - \binom{k+n}{k} x^{n+1} \quad \& = \quad \boxed{\sum_{i=0}^n \binom{k+i-1}{k-1} x^i - \binom{k+n}{k} x^{n+1}}. \end{aligned}$$

2— Il s'agit ici d'utiliser proprement les croissances comparées :  $n^k x^n = e^{k \ln n + n \ln x} = e^{n \ln x \left( k \frac{\ln n}{n \ln x} + 1 \right)}$ , puisque  $\ln x < 0$  le dernier terme converge vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ . D'où :  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k x^n = 0$ .

3— On utilise la définition d'un coefficient binomial en terme de factoriels. On a :

$$\binom{k+n}{k} = \frac{(k+n)!}{k!n!} = \frac{(k+n)(k+n-1) \cdots n}{k!} \quad \boxed{\sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!}},$$

puisque sous cette forme il apparaît un produit fini de  $k$  (indépendant de  $n$ ) termes au numérateur, l'équivalent est donc donné par le produit de chaque équivalent. Ainsi  $\binom{k+n}{k} x^{n+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k x^n x}{k!}$  et ce dernier terme tend vers zéro d'après une question précédente.

4— ■ **Initialisation.** La propriété a déjà été initialisée dans la première question.

■ **Hérédité.** Supposons là vraie au rang  $k-1$ , alors en utilisant 1.2 on a que  $(1-x)S_{n,k}$  s'exprime comme différence deux termes convergeant ( $S_{n,k-1}$  par hypothèse de récurrence, le second d'après la question précédente), on peut donc passer à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-x)S_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,k-1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{k+n}{k} x^{n+1} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} - 0.$$

Comme  $x \neq 1$ , nous obtenons le résultat en divisant par  $(1-x)$ .

5— Nous avons donc que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{k} x^i$  existe. En particulier  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$  après changement  $n = k+i$ , donc également  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

d'où la formule en multipliant par  $x^k$ .

6— Pour  $k=1$  et  $k=2$  on retrouve la formule donnant la somme d'une série géométrique dérivée une fois et deux fois.

### Partie II— Partie 2..

7— Évidemment : lance exactement  $k$  fois une pièce (avec  $k$  entier aléatoire) et donc pas  $j$  fois pour  $j \neq k$ . La famille  $(L_n)$  est donc un système complet d'évènements. On en déduit que  $\left( \sum_{n \leq 0} u_n \right)$  est une série convergente de somme  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ .



8— 8.1.  $\mathbf{P}(G_k|L_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{sinon} \end{cases}$  puisque les lancers se font de manière indépendante.

8.2. D'après la formule de probabilités totales, on a :  $\mathbf{P}(G_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(G_k|L_n) \mathbf{P}(L_n) = \boxed{\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} u_n}$ .

9— 9.1. On calcule :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = \boxed{1}$ .

9.2. Remplacer, sortir les termes qui ne dépendent pas de  $n$  et simplifier les factoriels.

9.3. Il suffit de reconnaître une série exponentielle, pour tout entier  $k$  on fait le changement  $m = n - k$  dans la somme :

$$\mathbf{P}(G_k) = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+k} (1-p)^m}{m!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \lambda^k e^{\lambda(1-p)} = \boxed{\frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}}$$

9.4. Puisque  $\left(\sum_{k \leq 0} \mathbf{P}(G_k)\right)$  est elle-même encore une série exponentielle, on obtient la convergence et la valeur de la somme :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(G_k) = e^{-\lambda p} e^{\lambda p} = 1}$$

La famille  $(G_k)$  est donc un système quasi-complet d'évènements.

9.5. Pour tout entier  $k \in \mathbf{N}^*$ , nous avons  $k\mathbf{P}(G_k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda p} \lambda p \frac{(\lambda p)^{k-1}}{(k-1)!}$ , donc comme  $\left(\sum_{k \leq 1} \frac{(\lambda p)^{k-1}}{(k-1)!}\right)$  converge (série exponentielle), nous obtenons la convergence de  $\left(\sum_{k \leq 0} k\mathbf{P}(G_k)\right)$ . De plus, sa somme est égale à :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{P}(G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(G_k) = e^{-\lambda p} \lambda p e^{\lambda p} = \boxed{\lambda p}$$

Cette dernière quantité correspond donc au grain moyen.

10—10.1. On suppose que pour tout entier  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = q^{n-1} p$  avec  $q = 1 - p$ . Alors  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p = p \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{p}{1-q} = \boxed{1}$ . La probabilité  $u_0$  vaut donc  $1 - 1 = 0$  puisque  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1$  (la famille  $(L_k)$  est un système complet d'évènements).

10.2.  $\mathbf{P}(G_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n p q^{n-1} = \frac{p}{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \boxed{\frac{p}{q} \frac{1}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}}$ .

10.3. On calcule ensuite  $\mathbf{P}(G_k)$  pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ . On a :

$$\mathbf{P}(G_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} p q^{n-1} = \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{2n}$$

Puisque  $q \in ]0, 1[$ , le résultat établi dans la première partie nous donne :

$$\mathbf{P}(G_k) = \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} \frac{q^{2k}}{(1-q^2)^{k+1}} = \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} \frac{q^{2k}}{(1-q)^{k+1} (1+q)^{k+1}} = \boxed{\frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}}$$

10.4. La série est quasiment une série géométrique dérivée :  $k\mathbf{P}(G_k) = k \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} = \frac{1}{1+q^2} k \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$ , donc comme  $\left|\frac{q}{1+q}\right| < 1$  la série converge et vers :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{P}(G_k) = \frac{1}{1+q^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{1+q}\right)^2} = \boxed{1}$$

Le nombre 1 correspond donc au grain moyen.