# DEVOIR MAISON # 4
## à rendre le Jeudi 05/12/2019

## Consignes

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.*
***Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.***

**Problème 1** On s'intéresse dans cet exercice à l'étude d'un jeu dans une fête foraine. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ modélisant les expériences aléatoires du problème et sur lequel sont définies les variables aléatoires.
Pour ce jeu, le participant lance successivement $n$ boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $\mathrm{N} \geqslant 2$. On suppose que les différents lancers sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule tombe dans une case donnée est $\frac{1}{\mathrm{N}}$ (toutes les boules finissent donc dans une case de manière équiprobable). Une case peut contenir plusieurs boules.
Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire $\mathrm{T}_n$ égale au nombre de cases non vides à l'issue de ces $n$ lancers.

1— ***(Modélisation Informatique)***

**1.1.** Écrire une fonction Python `Liste` qui prend en argument les nombres entiers $n$ et N et renvoie une liste qui contient le nombre de boules dans chaque case à l'issue du jeu. *Indication : On s'autorisera à utiliser la fonction `randint` du module `random`.*

**1.2.** À l'aide de cette fonction, écrire une fonction `T` qui prend en argument $n$, N et renvoie la valeur prise par la variable aléatoire $\mathrm{T}_n$ lors de l'expérience.

**1.3.** Deux personnes jouent à ce jeu. Elles souhaitent comparer les résultats obtenues car elles pensent que le jeu est truqué. Écrire une fonction `compar` qui prend en argument les nombres entiers $n$ et N et renvoie le pourcentage de cases qui contiennent le même nombre de boules pour deux expériences.

2— Déterminer les valeurs prises par $\mathrm{T}_n$ en fonction de $n$ et N. *Indication : On pourra distinguer deux cas.*

3— Donner les lois de $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$. *Indication : On pourra considérer les évènements $\mathrm{B}_k$ « les deux boules sont dans la case $k$ » avec $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}$, et exprimer $\{\mathrm{T}_2 = 1\}$ à l'aide des $\mathrm{B}_k$.*

4— **4.1.** Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$ : $\mathbf{P}(\mathrm{T}_n = 1)$.

**4.2.** Montrer que : $\mathbf{P}(\mathrm{T}_n = n) = \frac{\mathrm{N}!}{(\mathrm{N}-n)!\mathrm{N}^n}$ si $n \leqslant \mathrm{N}$, et $\mathbf{P}(\mathrm{T}_n = n) = 0$ si $n > \mathrm{N}$. **On supposera dans la suite que $n \leqslant \mathrm{N}$.**

5— Justifier l'égalité $(\star)$ pour tout entier $k \in [\![1\,,\,n]\!]$ :

$$\mathbf{P}(\mathrm{T}_{n+1} = k) = \frac{k}{\mathrm{N}}\mathbf{P}(\mathrm{T}_n = k) + \frac{\mathrm{N}-k+1}{\mathrm{N}}\mathbf{P}(\mathrm{T}_n = k-1) \quad (\star).$$

Vérifier qu'elle est encore valable pour $k = n+1$.

6— ***(Calcul de l'espérance par série génératrice)*** Afin de calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathrm{T}_n)$, on considère la fonction polynomiale $\mathrm{G}_n$ suivante appelée *fonction génératrice de* $\mathrm{T}_n$ :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{G}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{T}_n = k)\, x^k.$$

**6.1.** Que vaut $\mathrm{G}_n(1)$ ?

**6.2.** Calculer $\mathrm{G}_n'$ puis exprimer $\mathbf{E}(\mathrm{T}_n)$ en fonction de $\mathrm{G}_n'(1)$.

**6.3.** En utilisant la relation $(\star)$, monter que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{G}_{n+1}(x) = \frac{1}{\mathrm{N}}x(1-x)\mathrm{G}_n'(x) + x\mathrm{G}_n(x).$$

**6.4.** En dérivant l'égalité précédente, en déduire que : $\mathbf{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbf{E}(T_n) + 1$. Quelle est la nature de $(\mathbf{E}(T_n))_{n\geqslant 0}$ ?

**6.5.** Conclure en donnant l'expression de $\mathbf{E}(T_n)$ en fonction de $n$ et $N$.

## Correction

**Solution (Problème 1)**

**1— 1.1.**

```python
import random as rd
def Liste(n, N):
    '''
    (n,N)-> la liste des nombres de boules dans chacune des N cases en n lancers
    '''
    L = [0 for _ in range(N)]
    for _ in range(n):
        L[rd.randint(0, N-1)] += 1
    return L
```

Par exemple, `Liste(10, 5)` renvoie [2, 3, 1, 3, 1].

**1.2.**

```python
import random as rd
def T_valeur(n, N):
    '''
    (n,N)-> une simulation de Tn
    '''
    S = 0
    L = Liste(n, N)
    for x in L:
        if x == 0:
            S += 1
    return S
```

Par exemple, `T_valeur(10, 5)` renvoie 0.

**1.3.**

```python
import random as rd
def Compar(n, N):
    '''
    (n,N)-> compare les résultats de deux joueurs pour le jeu de paramètres n,N.
    Résultat sous forme de pourcentage
    '''
    S = 0
    L_Joueur1 = Liste(n, N)
    L_Joueur2 = Liste(n, N)
    for k in range(N):
        if L_Joueur1[k] == L_Joueur2[k]:
            S += 1
    return (S/N)*100
```

Par exemple, `Compar(100, 60)` renvoie 18.3333333333.

**2—** Il y a forcément une case ayant une boule.

❶ Si $N \geqslant n$ : alors on lance moins de boules que de cases disponibles, donc on a $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1\,,\,n]\!]}$.

❷ Si $N < n$ : alors le nombre de boules dépasse le nombre cases. On déduit alors que $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1\,,\,N]\!]}$.

Finalement : $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1\,,\,\min(n, N)]\!]}$.

**3—** $T_1 = 1$ p.s puisqu'une seule case est remplie. Pour $T_2$ : suivons l'indication. On a $\{T_2 = 1\} = B_1 \cap B_2 \cup B_3 \cap \cdots \cup B_N$. La réunion est même disjointe donc :

$$\mathbf{P}(T_2 = 1) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N^2} = \boxed{\frac{1}{N}}.$$

Donc $\boxed{T_2(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } \mathbf{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}, \quad \mathbf{P}(T_2 = 0) = 1 - \frac{1}{N}.}$

**4— 4.1.** Le même raisonnement que précédemment en considérant $B_k$ « les $n$ boules sont dans la case $k$ », on déduit que $\boxed{\mathbf{P}(T_n = 1) = \frac{1}{N}}$.

**4.2.** Dans le second, l'évènement $\{T_n = n\}$ signifie que les boules sont arrivées dans $n$ cases distinctes.

❶ Si $n > N$, la probabilité est nulle car forcément une case contiendra au moins deux boules.

❷ Si $n < N$, cela revient à sélectionner, de manière simultanée, les $n$ cases accueillant une boules parmi les N disponible (le caractère simultané garantit l'unicité de la boule dans chaque case). Ainsi

$$\mathbf{P}(T_n = n) = \frac{\text{Nb répartition 1 boule par case}}{\text{Nb total de répartition des boules}} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{N^n} = \boxed{\frac{N!}{(N-n)!N^n}}.$$

**5—** Remarquons que puisque $n \leqslant N$, $\{T_n = k\}_{k=1,\dots,n}$ forme un système complet d'évènements. Soit alors $k \in [\![0, N]\!]$. Pour $k = 0$ la formule est évidemment vraie puisque toutes les probabilités sont alors nulles dans la formule. Supposons que $k \in [\![1\,,\,N]\!]$, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{N} \mathbf{P}(T_{n+1} = k | T_n = \ell)\,\mathbf{P}(T_n = \ell)\\ &= \mathbf{P}(T_{n+1} = k | T_n = k-1)\,\mathbf{P}(T_n = k-1) + \mathbf{P}(T_{n+1} = k | T_n = k)\,\mathbf{P}(T_n = k)\end{aligned}$$

car si en $n+1$ lancers on a $k$ cases différentes occupées, alors sur les $n$ premiers lancers on avait :

— soit une de moins (et le dernier lancer fait augmenter le nombre de cases occupées), la probabilité que cela arrive est de lancer la boule dans l'une des cases restantes en nombre $N-k+1$ sur le nombre total de cases N.

— Dans le deuxième cas, la boule arrive dans une case déjà occupée, qui sont en nombre $k$, il y a donc une probabilité $\frac{k}{N}$ que cela arrive.

Finalement, on obtient la formule voulue :

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbf{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbf{P}(T_n = k-1) \quad (\star).$$

De plus, pour $k = n+1$, on constate en utilisant une question précédente, qu'elle est équivalente à

$$\frac{N!}{(N-n-1)N^{n+1}} = \frac{n+1}{N} \times 0 + \frac{N-n}{N}\,\frac{N!}{(N-n)!N^n}.$$

Cette dernière formule est vraie.

**6— 6.1.** Pour $x = 1$, on obtient $\boxed{G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T_n = k) = 1}$ par définition d'une probabilité.

**6.2.** En dérivant une fois, on trouve $G_n'(x) = \sum\limits_{k=1} \mathbf{P}(T_n = k)\, k x^{k-1}$. En faisant $x = 1$, on récupère : $\boxed{\mathbf{E}(T_n) = G_n'(1).}$

**6.3.** Sommons la relation $(\star)$ multipliée par $x^k$ avec $x \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{P}(T_{n+1} = k)\, x^k &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{N}\mathbf{P}(T_n = k)\, x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{N-k+1}{N}\mathbf{P}(T_n = k-1)\, x^k\\ &= \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(T_n = k)\, x^{k-1} + \frac{N+1}{N}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{P}(T_n = k-1)\, x^k - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbf{P}(T_n = k-1)\, x^k\\ &= \frac{x}{N}G_n'(x) + \frac{N+1}{N}\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(T_n = k)\, x^{k+1} - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\mathbf{P}(T_n = k)\, x^{k+1}\\ &= \frac{x}{N}G_n'(x) + \frac{x(N+1)}{N}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(T_n = k)\, x^k - \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(T_n = k)\, x^k - \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(T_n = k)\, x^k\\ &= \frac{x}{N}G_n'(x) + \frac{x(N+1)}{N}G_n(x) - \frac{x^2}{N}G_n'(x) - \frac{x}{N}G_n(x).\end{aligned}$$

où :

❶ la première somme a été arrêtée à $n$ puisque $\mathbf{P}(T_n = n+1) = 0$,

❷ dans la seconde nous avons fait le changement $\ell = k-1$ afin de reconnaître la fonction génératrice de $T_n$,

❸ et enfin, le même changement de variable dans la dernière somme.

En factorisant par $G_n'(x)$ et $G_n(x)$, on trouve la relation cherchée :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}x(1-x)G_n'(x) + xG_n(x).}$$

**6.4.** Dérivons-là par rapport à $x$ et faisons $x = 1$. Alors :

$$\begin{aligned} G_{n+1}'(x) &= \frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x) + G_n(x) + xG_n'(x), \\ G_{n+1}'(1) &= -\frac{1}{N}G_n'(1) + G_n(1) + G_n'(1). \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\mathbf{E}\left(T_{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbf{E}\left(T_n\right) + 1}$. C'est la formule demandée. La suite $(\mathbf{E}\left(T_n\right))$ est donc arithmético-géométrique.

**6.5.** On cherche $\alpha$ tel que : $\alpha = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\alpha + 1$, on trouve $\alpha = N$. Ainsi la suite $(\mathbf{E}\left(T_n\right) - N)$ est géométrique de raison $1 - \frac{1}{N}$, donc pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ :

$$\mathbf{E}\left(T_n\right) - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(\mathbf{E}\left(T_1\right) - N\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)(1 - N) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{E}\left(T_n\right) = N + \left(1 - \frac{1}{N}\right)(1 - N) = 2 - \frac{1}{N}}.$$