DEVOIR MAISON # 3
à rendre le Jeudi 14/11/2019

Consignes

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.

Exercice 1 ***Étude d'une suite implicite. Convergence de la série associée.*** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on considère la suite fonction f_n définie par : $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. [Sol 1]

1— Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution que l'on encadrera entre deux entiers consécutifs. On notera a_n cette solution.

2— Comment obtenir une valeur approchée de a_n de manière algorithmique ?
Créer une fonction Python d'en-tête `approx_a(n)` prenant en argument un entier strictement positif et renvoyant une valeur approchée à 10^{-4} près de a_n.
Dans toute la suite, on utilisera pour a_n des valeurs approchées à 10^{-4} près.

3— Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \geqslant 0$. En déduire le signe de $f_{n+1}(a_n)$, puis les variations de (a_n).

4— La suite converge-t-elle ?

5— Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant 0$ et en déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} a_n$.

6— Remarquant que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $na_n(a_n^2 + n) = 2$, établir $a_n < \frac{2}{n^2}$, puis que : $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$.

7— On souhaite à présent étudier la convergence de $\left(\sum a_n\right)_{n\geqslant 1}$ **sans utiliser l'équivalent précédent**. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pour $n \geqslant 1$.

7.1. Créer une fonction Python d'en-tête `Trace_Calc_S(n)` prenant en argument un entier strictement positif, et :

❶ renvoyant une valeur approchée de $n^2 a_n$,

❷ traçant sur un graphique tous les termes approchés de la suite $(n^2 a_n)$ jusqu'au rang n.

Que conjecturer de la nature de la série à l'aide de ce dessin ?

7.2. Déterminer le sens de variations de $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

7.3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $a_n \leqslant 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

7.4. En déduire la nature de la série.

Correction

Solution (Exercice 1)

1— La fonction f_n est continue pour tout $n \in \mathbf{N}$, elle est même dérivable avec $f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 > 0$. Donc f_n est strictement croissante. De plus, $f_n(0) = -2$, et $f_n(1) = n + n^2 - 2 > 0$ pour $n \geqslant 1$ (calculer par exemple le discriminant et regarder les racines qui sont $-2, 1$). Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{il existe un unique réel } a_n \in [0,1] \text{ tel que } f_n(a_n) = 0.}$

2— On peut appliquer l'algorithme de Dichotomie pour estimer a_n.

```python
def f(n, x):
    return n*x**3+n**2*x-2

def approx_a(n):
    '''
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f_n entre 0 et 1 avec précision 10**(-4)
    '''
    a = 0
    b = 1
    while b-a > 10**(-4):
        c = (a+b)/2
        if f(n, a)*f(n, c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

Par exemple, pour $n = 5$, on a 0.25.

3— Soit $x \in \mathbf{R}^+$, $\quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)x^3 + (n+1)^2 x - 2 - (nx^3 + n^2 x - 2) = x^3 + (2n+1)x \geqslant 0$. Donc $\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0.}$

En évaluant en $x = a_n$ et en utilisant la définition de a_n on obtient : $\boxed{f_{n+1}(a_n) \geqslant 0 = f_{n+1}(a_{n+1}).}$
Donc puisque la fonction f_{n+1} est croissante, on obtient que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $\quad a_n \geqslant a_{n+1}$.
$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est donc décroissante.}}$

4— Elle est décroissante minorée par 0, $\boxed{\text{donc converge vers une limite finie.}}$

5— On a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^3} + \frac{n^2}{n} - 2 = \frac{1+n^3-2n^2}{n^2} = \frac{(n-1)(n^2-n-1)}{n^2}$. Pour $n = 1$ cette quantité est nulle, donc positive. Puis pour $n \geqslant 2$, on a $n^2 - n - 1 \geqslant 0$ car la plus grande de ses racines est inférieure strictement à deux. Bref, $\boxed{f_n(1/n) \geqslant 0.}$

Cette estimée fournit un encadrement plus fin que le précédent : $\quad 0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n}$, donc par le théorème d'encadrement on a : $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0.}$

6— On a par définition $na_n^3 + n^2 a_n = 2$. Donc en mettant na_n en facteur, on a $\boxed{na_n(a_n^2 + n) = 2}$. Mais comme $a_n > 0$ car $f_n(0) < 0$, on a $n + a_n^2 > n$ d'où $\boxed{n^2 a_n < 2}$.
Pour avoir l'autre partie de l'encadrement donnant l'équivalent, on peut donc majorée a_n cette fois par 1. Donc on obtient :

$$2 = na_n(a_n^2 + n) \leqslant na_n(n+1) \quad \Longrightarrow \quad a_n \geqslant \frac{2}{n(n+1)}.$$

Combinant les deux encadrements, on obtient :

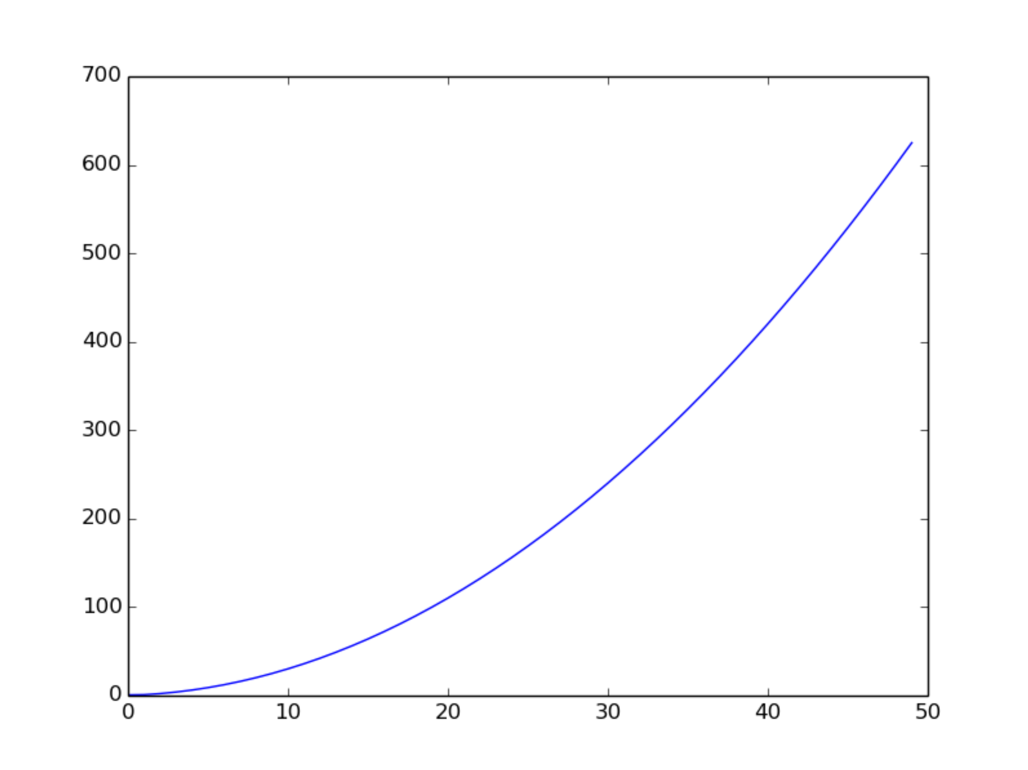
$$\frac{2}{n(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{n^2}{n(n+1)} \leqslant \frac{n^2}{2} a_n \leqslant 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2} a_n = 1$ par théorème d'encadrement. D'où : $\boxed{a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}}$.

7— 7.1.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
def Trace_Calc_S(n):
    '''
    n->graphe de n^2a_n et valeur
    '''
    plt.plot([i**2*approx_a(i) for i in range(1,n+1)])
    return n**2*approx_a(n)

Trace_Calc_S(50)
plt.show()
```



On constate que la suite $(n^2 a_n)$ semble bornée, donc par critère de comparaison des séries positives, la série sera probablement convergente.

7.2. La suite (S_n) est la somme partielle d'une série à termes positifs, donc elle est $\boxed{\text{croissante}}$ d'après le cours. Cela pour rappel provient de $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

7.3. Puisque $a_n \leqslant \frac{2}{n^2}$, il suffit de vérifier que $\frac{2}{n^2} \leqslant 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, ceci est équivalent à $n^2 \geqslant n$ après calculs, inégalité toujours vraie dès que $n \geqslant 1$. Donc : $\boxed{a_n \leqslant 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}$.

7.4. La question précédente fournit, en sommant et en téléscopant les termes :

$$0 \leqslant S_n \leqslant 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Le majorant converge vers 1 donc est en particulier borné, donc la suite (S_n) est croissante majorée et converge. En d'autres termes, $\boxed{\text{la série } \left(\sum a_n\right)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente.}}$