DEVOIR MAISON # 2
à rendre le Jeudi 10/10/2019

Consignes

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.

Exercice 1 ***Règle de l'Hôpital*** Soient $f : [0,a] \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : [0,a] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur $[0,a]$, dérivables sur $]0,a]$ telles que : $f(0) = g(0) = 0$. On suppose en outre que g et g' ne s'annulent pas sur $]0,a]$.

1 — Pour tout $x \in]0,a]$, appliquer le théorème de Rolle à $t \longmapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.

2 — En déduire que si : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi et qu'elles sont égales, on appelle cette propriété la *règle de L'Hôpital*.

3 — Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin x - x}$.

Exercice 2 ***Quelques endomorphismes nilpotents.*** Dans cet exercice la notation $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Si E est un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on note f^k l'endomorphisme

$$f^k = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

Un endomorphisme de E est dit *nilpotent* s'il existe un entier naturel m tel que $f^m = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1 — Soit f l'application de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^n$ qui a tout $-n$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbf{K}^n$ associe le n-uplet $(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$.

1.1. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$. Déterminer son noyau et son image.

1.2. On représente un élément $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbf{K}^n$ par une liste `L = [x1, x2, ..., xn]`.

- **1.2.1.** Écrire une fonction d'en-tête `calc_f(L)` prenant en argument une liste `L`, et renvoyant la liste correspondant à `f(L)`.
- **1.2.2.** En déduire une fonction d'en-tête `nilpo_calc_f(L)` qui calcule pour $x \in \mathbf{K}^n$ fixé correspondant à `L` le plus petit entier m tel que $f^m(x) = 0_{\mathbf{K}^n}$.

1.3. Montrer que f est nilpotent.

2 — On définit $\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbf{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) \end{array} \right.$.

2.1. Quelle relation y-a-t-il entre le degré de P et celui de $\Delta(\mathrm{P})$?

2.2. Montrer que $\Delta|_{\mathbf{K}_n[\mathrm{X}]}$ est un endomorphisme de $\mathbf{K}_n[\mathrm{X}]$. Nous le noterons Δ_n dans la suite.

2.3. Déterminer le noyau de Δ_n puis son image.

2.4. Montrer que Δ_n est nilpotent.

3 — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ nilpotent. Soit m le plus petit entier strictement positif tel que : $f^m = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})}$.

3.1. Justifier qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Un vecteur x vérifiant cette propriété est fixé dans la suite.

3.2. Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x))$ est libre dans E.

3.3. En déduire un minorant de $\dim \mathrm{E}$.

Correction

Solution (Exercice 1)

1 — Notons φ la fonction proposée par l'énoncé. Alors elle est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ par hypothèse, et s'annule en 0 et en x. Donc d'après le théorème de Rolle, $\boxed{\text{il existe } c_x \in]0,x[\text{ tel que : } \quad f(x)g'(c_x) = f'(c_x)g(x).}$

2 — Supposons que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Alors, par composition de limite et puisque $c_x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, nous avons l'existence de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ et :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}}.$$

C'est ce qu'on voulait.

3 — La forme initiale est indéterminée. On pourrait aussi répondre à la question en cherchant un équivalent du numérateur et dénominateur. Mais puisque les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ et $x \longmapsto \sin x - x$ sont continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1]$ (le point 1 n'a aucune importance, il suffit que cette propriété soit vraie sur un petit intervalle à droite de zéro), nous avons :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{\cos x - 1},$$

ensuite on réapplique la même règle aux deux nouvelles fonctions, puis encore une fois, en vérifiant les hypothèses de L'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{-\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{-\cos x}\right) = \boxed{-1}.$$

À la dernière étape la forme n'est plus indéterminée.

Solution (Exercice 2)

1 — **1.1.** On vérifie facilement que l'application est linéaire. En effet, si $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ sont deux éléments de $\mathbf{K}^n$ et λ,μ deux éléments de $\mathbf{K}$, on a alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1,\dots,x_n) + \mu(y_1,\dots,y_n)) &= f(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) \\ &= (0, \lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1}) \\ &= \lambda f((x_1,\dots,x_n)) + \mu f((y_1,\dots,y_n)). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est linéaire.}}$ Un n-uplets est dans le noyau si $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$, donc le noyau est $\boxed{\mathrm{Vect}(1,0,\dots,0).}$ Enfin, l'image est composée des vecteurs dont la première coordonnée est nulle, donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\, e_2, e_3, \dots, e_n,}$ où $e_2,\dots,e_n$ sont les $n-1$ derniers vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

1.2. ■ **1.2.1.**
```python
def calc_f(L):
    M = L[:]
    del M[len(L)-1]
    return [0]+M
```

■ **1.2.2.**
```python
def nilp_calc_f(L):
    m = 0
    n = len(L)
    while L != [0]*n:
        L = calc_f(L)
        m = m+1
    return m
```

1.3. On remarque immédiatement que l'on fait apparaître un zéro à gauche en appliquant une fois f, donc n zéros en appliquant n fois f, en résumé : $f^n = 0$ donc $\boxed{f \text{ est nilpotent.}}$

2 — **2.1.** Voir TD sur les applications linéaires : nous avons prouvé que $\boxed{\deg \Delta(\mathrm{P}) = \deg \mathrm{P} - 1}$ pour tout élément $\mathrm{P} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$.

2.2. Voir TD : nous avions prouvé que Δ est linéaire et clairement si $P \in \mathbf{K}_n[X]$ alors $\Delta(P) \in \mathbf{K}_n[X]$ puisque $\deg \Delta(P) < \deg P$.

2.3. Prenons $P \in \operatorname{Ker} \Delta_n$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = P(x+1)$. En particulier $P(0) = P(1) = \ldots = P(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $\alpha = P(0) = P(1) = \ldots = P(n)$ leur valeur commune. Alors $(P - \alpha)(n) = 0$ pour tout n donc $P - \alpha$ possède une infinité de racines. Ainsi, P est constant (égal à $P(0) = \alpha$) et $\boxed{\operatorname{Ker} \Delta_n = \operatorname{Vect}(1).}$

Le noyau est de dimension 1, l'image est donc de dimension $n+1-1 = n$ d'après la formule du rang. Or, $\operatorname{Im} \Delta_n \subset \mathbf{K}_{n-1}[X]$ d'après ce qui précède, donc par égalité des dimensions on conclut : $\boxed{\operatorname{Im} \Delta_n = \mathbf{K}_{n-1}[X].}$

2.4. Puisque le degré diminue de un en appliquant Δ à un polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$, on a $\Delta_n^n(P)$ constant disons égal à C. Or, $\Delta(C) = C - C = 0$ donc $\Delta_n^{n+1}(P) = 0$ et $\boxed{\Delta_n \text{ est donc nilpotent.}}$

3 — 3.1. L'hypothèse contraire de « il existe $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0_E$ » est « pour tout $x \in E$, $f^{m-1}(x) = 0_E$ » ce qui impliquerait $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$ — contradiction. Donc $\boxed{\text{il existe } x \in E \text{ tel que } f^{m-1}(x) \neq 0_E}$.

3.2. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \mathbf{K}^m$ tel que : $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \ldots + \lambda_m f^m(x) = 0$.
Alors appliquons f^{m-1} à cette identité. Nous obtenons : $\lambda_0 f^{m-1}(x) + 0 + \ldots + 0 = 0$ en utilisant que $f^m = 0$ et que pour tout $k \leqslant m$, on a aussi $f^k = 0$. Puisque $f^{m-1}(x) \neq 0$, une propriété du cours nous permet d'affirmer que $\lambda_0 = 0$. Ensuite, on recommence, on applique cette fois f^{m-2} dans l'égalité initiale qui nous livre $\lambda_1 f^{m-1}(x) + 0 = 0$ *etc.*...

Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)) \text{ est libre.}}$

3.3. Nous avons donc une famille libre à m éléments, donc $\boxed{\dim E \leqslant m}$.