# SEMAINE 21

# du 16 au 20/03/2020

*Cette semaine : toutes les statistiques. La semaine prochaine, on ajoutera le produit scalaire euclidien.*

## 1 [Maths] Statistiques

— **Statistiques descriptives.** Univariées : série statistique, caractères, modalités. Effectifs et regroupement en classes. Fréquences. Versions cumulées. Visualisation graphique (diagramme en bâtons, histogrammes, polygone des fréquences cumulées, *etc.*). Caractéristiques de positions : mode, moyenne, propriétés, médiane, quartiles, quantiles. Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type, étendue, propriétés. Bivariées : série statistique, effectifs/fréquences conjoints/marginaux, moyennes des marginales. Covariance. Développement de la variance d'une somme. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et coefficient de corrélation. Droite de régression linéaire : existence et démonstration, mesure de la qualité d'une régression.

— **Statistiques inférentielles.** Généralités sur l'estimation : échantillon, estimateur d'un paramètre dépendant d'un échantillon, qualité d'un estimateur (biais, erreur d'estimation, risque quadratique). Estimateurs classiques : moyenne empirique, variance empirique, variance empirique corrigée. Décomposition biais/variance. Intervalles de confiance : généralités, techniques pour les obtenir : centrage/réduction pour les échantillons gaußiens, théorème central limite ou Bienaymé-Tchebychev pour les échantillons quelconques, analyse de leur précision. Test de conformité à la moyenne, et éléments de vocabulaires généraux sur les tests.

***Questions de cours.***

— Fonction de deux variables à minimiser pour obtenir les coefficients de la droite de régression linéaire : définition et interprétation géométrique. Calcul des points critiques.

— Définition de l'étendue d'une série statistique, et script Python la calculant. La série étant représentée par une liste.

— Définition de l'espérance et de la variance d'une série statistique, et script Python les calculant. La série étant représentée par une liste.

— Définition de la variance empirique. Calcul du biais.

— Retrouver, à partir du théorème central limite, l'intervalle de confiance asymptotique de niveau $\alpha \in [0,1]$ pour l'espérance en fonction de la moyenne empirique.

— Test d'adéquation à la moyenne : explication du principe.

# SEMAINE 20

# du 09 au 13/03/2020

*Au programme de la semaine suivante : le produit scalaire euclidien.*

**Attention** Cette semaine encore, les questions de cours comportent aussi des savoir-faire indispensables pour les oraux Agro-Véto. Exceptionnellement je souhaiterais que chaque étudiant ait **deux questions de cours** : une avec informatique, et une seconde sans.
On peut se dispenser de celle avec Info si un exercice y fait appel dans la suite de la planche.

## 1 [Maths] Statistiques

— **Statistiques descriptives.** Univariées : série statistique, caractères, modalités. Effectifs et regroupement en classes. Fréquences. Versions cumulées. Visualisation graphique (diagramme en bâtons, histogrammes, polygone des fréquences cumulées, *etc.*). Caractéristiques de positions : mode, moyenne, propriétés, médiane, quartiles, quantiles. Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type, étendue, propriétés. Bivariées : série statistique, effectifs/fréquences conjoints/marginaux, moyennes des marginales. Covariance. Développement de la variance d'une somme. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et coefficient de corrélation. Droite de régression linéaire : existence et démonstration, mesure de la qualité d'une régression.

— **Statistiques inférentielles.** Généralités sur l'estimation : échantillon, estimateur d'un paramètre dépendant d'un échantillon, qualité d'un estimateur (biais, erreur d'estimation, risque quadratique). Estimateurs classiques : moyenne empirique, variance empirique, variance empirique corrigée. Décomposition biais/variance.

***Questions de cours.***

— Fonction de deux variables à minimiser pour obtenir les coefficients de la droite de régression linéaire : définition et interprétation géométrique. Calcul des points critiques.

— Définition de l'étendue, et script Python renvoyant l'étendue d'une série statistique. La série étant représentée par une liste.

— Définition de la variance empirique. Calcul du biais.

## 2 [Maths] Théorèmes limites probabilistes

— **Inégalités de concentration.** Reprise des inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev. Applications.

— **Théorèmes limites.** Définition de la moyenne empirique, et variance empirique (version corrigée/non biaisée **non encore vue**). Loi faible des grands nombres, définition de la convergence en probabilités. Conséquence importante : estimer avec Python la valeur d'une probabilité (ou d'une expérience), en simulant un grand nombre de fois l'expérience. Exemple sur des séries de lancers de dés, et sur l'approximation de $\pi$ par simulation de points sur le cercle unité. Méthode de Monte-Carlo. Théorème central limite : version centrée-réduite de la moyenne empirique, de la somme partielle, approximation de la loi de la moyenne empirique par une gaussienne, version avec approximation de la variance par la variance empirique. Conséquences du théorème central limite : approximation de la loi normale par la binomiale ou Poisson. Approximation d'une binomiale par une hypergéométrique, d'une Poisson par une binomiale.

***Questions de cours.***

— Estimer par simulation la probabilité $\mathbf{P}\left(X_1^2+X_2^2 \leqslant 1\right)$ si $X_1, X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ et sont indépendantes.

— Soit un dé à six faces équilibré. On le lance 10 fois et on note $E$ l'évènement « on a obtenu au moins 7 entiers pairs sur les 10 lancers ». Donner un script Python permettant d'estimer $\mathbf{P}(E)$.

## 3 [Info] Méthodes Numériques

— **Pour les suites & séries.** Calculs des termes d'une suite récurrente, de la somme partielle associée à une série.

— **Résolution d'équations du type $f(x) = 0$.** Méthode en formant une suite récurrence ayant $x$ pour point fixe. Révisions sur la méthode de Dichotomie. Méthode de Newton-Raphson (pas vue par manque de temps). Plusieurs conditions d'arrêt : si la limite est connue, ou si elle ne l'est pas.

— **Pour les équations différentielles.** Ordre 1 dans $\mathbf{R}$, ordre 2 dans $\mathbf{R}^2$ : exemple du système proie-prédateur de Lokta-Volterra (pas vu par manque de temps).

— **Pour les intégrales.** Méthode déterministe des rectangles à gauche et à droite, des trapèzes. Méthode probabiliste de Monte-Carlo. Exemple sur une intégrale calculable.

***Scripts de cours.***

❶ Sur un exemple au choix du colleur : scripts Python correspondant à la méthode des rectangles d'une part, et Monte-Carlo d'autre part (cas d'une intégrale convergente sur $[0,1]$). *On pourra éventuellement demander après le calcul explicite de l'intégrale.*

❷ Sur un exemple au choix du colleur : méthode de Dichotomie.

❸ Sur un exemple au choix du colleur : construction de la liste des premiers termes d'une suite récurrente, puis tracé de ladite suite.

# SEMAINE 19

## du 17 au 21/02/2020

*Au programme de la rentrée : les statistiques.*

> **Attention** Cette semaine, les questions de cours comportent aussi des savoir-faire indispensables pour les oraux Agro-Véto. Exceptionnellement je souhaiterais que chaque étudiant ait **deux questions de cours** : une avec informatique, et une seconde sans.
> On peut se dispenser de celle avec Info si un exercice y fait appel dans la suite de la planche.

### 1 [Maths] Théorèmes limites probabilistes

> **Attention** Les théorèmes d'approximation qui ne sont pas la conséquence du théorème central limite (hypergéométrique/binomiale et Poisson/binomiale) non pas encore été vus.
> L'étude théorique des convergences stochastiques n'est pas au programme de BCPST.

— **Inégalités de concentration.** Reprise des inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev. Applications.

— **Théorèmes limites.** Définition de la moyenne empirique, et variance empirique (version corrigée/non biaisée **non encore vue**). Loi faible des grands nombres, définition de la convergence en probabilités. Conséquence importante : estimer avec Python la valeur d'une probabilité (ou d'une expérience), en simulant un grand nombre de fois l'expérience. Exemple sur des séries de lancers de dés, et sur l'approximation de $\pi$ par simulation de points sur le cercle unité. Méthode de Monte-Carlo. Théorème central limite : version centrée-réduite de la moyenne empirique, de la somme partielle, approximation de la loi de la moyenne empirique par une gaussienne, version avec approximation de la variance par la variance empirique. Conséquences du théorème central limite : approximation de la loi normale par la binomiale ou Poisson.

*Questions de cours.*

— Énoncer le théorème central limite (deux formes : variance empirique ou exacte). Application à l'approximation d'une normale par une binomiale (Moivre-Laplace).

— Estimer par simulation la probabilité $\mathbf{P}\left(X_1^2+X_2^2\leqslant 1\right)$ si $X_1, X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ et sont indépendantes.

— Soit un dé à six faces équilibré. On le lance 10 fois et on note $E$ l'évènement « on a obtenu au moins 7 entiers pairs sur les 10 lancers ». Donner un script Python permettant d'estimer $\mathbf{P}(E)$.

### 2 [Maths] Vecteurs aléatoires discrets

— **Vecteurs aléatoires.** Généralités, notion de support, différence avec le produit cartésien des supports. Propriétés de stabilité : combinaison linéaire, et produit scalaire. Cas particulier des couples aléatoires : fonction de répartition, loi.

— **Couples aléatoires discrets.** Rappels sur les suites doubles : définition, théorème de Fubini, définition d'une somme double lorsque les hypothèses du théorème de Fubini sont vérifiées uniquement : **aucune notion plus générale sur les familles sommables n'est au programme.** Système complet associé à un couple, les différentes notions de lois (conjointe, marginale, conditionnelle). Liens entre ces lois. Propriétés de stabilité des couples aléatoires discrets. Loi de $f(X,Y)$ avec $f$ fonction de deux variables. Condition nécessaire et suffisante d'existence d'un couple aléatoire de loi fixée. Loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes : méthode générale, cas particulier des lois binomiales et lois de Poisson. Covariance : définition, propriétés, définition avec le théorème de transfert. Variance d'une somme : formule générale de développement. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Espérance et variance dans le cas d'indépendance.

*Questions de cours.*

— Définition d'une loi conjointe, des lois marginales pour un couple aléatoire discret. Expliquer comment obtenir la loi marginale de $X$ et $Y$ en fonction de la loi conjointe.

— Loi d'une somme de deux lois de Poisson indépendantes : énoncé et démonstration.

— Définition de la covariance. Énoncer et démontrer la formule de développement de $\mathbf{Var}(X+Y)$ en fonction de la covariance.

— Définition de la covariance et du coefficient de corrélation. Montrer que ce coefficient est borné par un (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), cas d'égalité **non demandé**.

## 3 [Info] Méthodes Numériques

— **Pour les suites & séries.** Calculs des termes d'une suite récurrente, de la somme partielle associée à une série.

— **Résolution d'équations du type $f(x)=0$.** Méthode en formant une suite récurrence ayant $x$ pour point fixe. Révisions sur la méthode de Dichotomie. Méthode de Newton-Raphson (pas vue par manque de temps). Plusieurs conditions d'arrêt : si la limite est connue, ou si elle ne l'est pas.

— **Pour les équations différentielles.** Ordre 1 dans $\mathbf{R}$, ordre 2 dans $\mathbf{R}^2$ : exemple du système proie-prédateur de Lokta-Volterra (pas vu par manque de temps).

— **Pour les intégrales.** Méthode déterministe des rectangles à gauche et à droite, des trapèzes. Méthode probabiliste de Monte-Carlo. Exemple sur une intégrale calculable.

*Scripts de cours.*

❶ Sur un exemple au choix du colleur : scripts Python correspondant à la méthode des rectangles d'une part, et Monte-Carlo d'autre part (cas d'une intégrale convergente sur $[0,1]$). *On pourra éventuellement demander après le calcul explicite de l'intégrale.*

❷ Sur un exemple au choix du colleur : méthode de Dichotomie.

❸ Sur un exemple au choix du colleur : construction de la liste des premiers termes d'une suite récurrente, puis tracé de ladite suite.

# SEMAINE 18

# du 10 au 14/02/2020

*Au prochain programme : les théorèmes limites en probabilités.*

## 1 [Maths] Vecteurs aléatoires discrets

**Attention** Très très peu d'exercices corrigés pour le moment, en dehors des exemples du cours.

— **Vecteurs aléatoires.** Généralités, notion de support, différence avec le produit cartésien des supports. Propriétés de stabilité : combinaison linéaire, et produit scalaire. Cas particulier des couples aléatoires : fonction de répartition, loi.

— **Couples aléatoires discrets.** Rappels sur les suites doubles : définition, théorème de Fubini, définition d'une somme double lorsque les hypothèses du théorème de Fubini sont vérifiées uniquement : **aucune notion plus générale sur les familles sommables n'est au programme.** Système complet associé à un couple, les différentes notions de lois (conjointe, marginale, conditionnelle). Liens entre ces lois. Propriétés de stabilité des couples aléatoires discrets. Loi de $f(X,Y)$ avec $f$ fonction de deux variables. Condition nécessaire et suffisante d'existence d'un couple aléatoire de loi fixée. Loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes : méthode générale, cas particulier des lois binomiales et lois de Poisson. Covariance : définition, propriétés, définition avec le théorème de transfert. Variance d'une somme : formule générale de développement. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Espérance et variance dans le cas d'indépendance.

***Questions de cours.***

— Définition d'une loi conjointe, des lois marginales pour un couple aléatoire discret. Expliquer comment obtenir la loi marginale de $X$ et $Y$ en fonction de la loi conjointe.

— Loi d'une somme de deux lois de Poisson indépendantes : énoncé et démonstration.

— Définition de la covariance. Énoncer et démontrer la formule de développement de $\mathbf{Var}(X+Y)$ en fonction de la covariance.

— Définition de la covariance et du coefficient de corrélation. Montrer que ce coefficient est borné par un (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), cas d'égalité **non demandé**.

## 2 [Maths] Fonctions de plusieurs variables

**Attention** En BCPST, les études de continuité et d'existence de limites ne sont pas des attendus du programme. On se contentera pour les colles sur le sujet de :

— faire calculer des dérivées de composées, et éventuellement demander la résolution d'une équation aux dérivées partielles dans un second temps.

— Faire étudier des *extrema* en faisant calculer les points critiques, puis en guidant sur la détermination de leur nature.

Par ailleurs, **la notion de différentiabilité est hors-programme.**

— **Motivation & Introduction** ; définition, surface associée à une fonction de deux variables et lignes de niveaux. Représentation de surfaces l'aide de la bibliothèque `mplot3d`.

— **Limites et continuité** ; quelques rudiments de topologie (norme euclidienne, ensemble ouvert, adhérence d'une partie de $\mathbf{R}^n$. Limite en un point adhérent de l'ensemble de définition. Méthode pour nier l'existence d'une limite (nier le théorème de composition ou caractérisation séquentielle). Reformulation dans le cas des fonctions de deux variables à l'aide des coordonnées polaires). Continuité : contre-exemple pour justifier que la continuité partielle n'entraîne pas la continuité globale.

— **Dérivabilité directionnelle et partielle.** Propriétés, gradient. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$. Formules de la chaîne pour les fonctions de deux variables. Formule de Taylor-Young à l'ordre 1. Le caractère $\mathscr{C}^1$ entraîne la continuité. Théorème de Schwarz. Condition nécessaire d'existence d'un extrema local/global, points critiques.

***Questions de cours.***

— Formule de Taylor à l'ordre un (énoncé uniquement) pour les fonctions de deux variables de classe $\mathscr{C}^1$. Application à $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^3+y^3}$ pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1{,}02^3+2{,}07^3}$ sans calculatrice.

— Formule de la chaîne pour la dérivation partielle en $u$ et $v$ d'expressions du type $f(x(u,v),y(u,v))$ avec $x,y,f$ de classe $\mathscr{C}^1$. Application au changement de variable polaire.

# SEMAINE 17

# du 03 au 07/02/2020

*Au prochain programme : les couples aléatoires discrets, et le retour de l'Informatique.*

**Attention** Cette semaine, je souhaiterais que chaque étudiant ait :
- un exercice court et rapide sur les fonctions de deux ou (grand maximum) trois variables.
- Un exercice portant exclusivement sur les lois usuelles à densité.

## 1 [Maths] Fonctions de plusieurs variables

**Attention** En BCPST, les études de continuité et d'existence de limites ne sont pas des attendus du programme. On se contentera pour les colles sur le sujet de :
- faire calculer des dérivées de composées, et éventuellement demander la résolution d'une équation aux dérivées partielles dans un second temps.
- Faire étudier des *extrema* en faisant calculer les points critiques, puis en guidant sur la détermination de leur nature.

Par ailleurs, **la notion de différentiabilité est hors-programme.**

- **Motivation & Introduction**; définition, surface associée à une fonction de deux variables et lignes de niveaux. Représentation de surfaces l'aide de la bibliothèque `mplot3d`.
- *Limites et continuité*; quelques rudiments de topologie (norme euclidienne, ensemble ouvert, adhérence d'une partie de $\mathbf{R}^n$. Limite en un point adhérent de l'ensemble de définition. Méthode pour nier l'existence d'une limite (nier le théorème de composition ou caractérisation séquentielle). Reformulation dans le cas des fonctions de deux variables à l'aide des coordonnées polaires). Continuité : contre-exemple pour justifier que la continuité partielle n'entraîne pas la continuité globale.
- *Dérivabilité directionnelle et partielle.* Propriétés, gradient. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$. Formules de la chaîne pour les fonctions de deux variables. Formule de Taylor-Young à l'ordre 1. Le caractère $\mathscr{C}^1$ entraîne la continuité. Théorème de Schwarz. Condition nécessaire d'existence d'un extrema local/global, points critiques.

***Questions de cours.***
- Formule de Taylor à l'ordre un (énoncé uniquement) pour les fonctions de deux variables de classe $\mathscr{C}^1$. Application à $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^3+y^3}$ pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1{,}02^3+2{,}07^3}$ sans calculatrice.
- Formule de la chaîne pour la dérivation partielle en $u$ et $v$ d'expressions du type $f(x(u,v),y(u,v))$ avec $x,y,f$ de classe $\mathscr{C}^1$. Application au changement de variable polaire.

## 2 [Maths] Variables aléatoires à densité

- **Généralités.** Définition d'une densité de probabilité. Définition d'une variable aléatoire à densité avec la fonction de répartition. Existence d'une variable aléatoire réelle de densité fixée. Non-unicité d'une densité. Trouver le support d'une variable aléatoire réelle à densité à partir d'une densité ou de la fonction de répartition. Lien entre densité et fonction de répartition lorsque cette dernière est continue et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. La fonction de répartition caractérise la loi. Deux variables aléatoires à densité de même loi ne sont pas forcément égales en tant qu'application. Une fonction affine (telle que « $a \neq 0$ ») d'une variable aléatoire à densité est à densité, expression explicite de la densité. Autres exemples de fonctions : exponentielle, logarithme de variables à densité. Exemple de variable aléatoire ni discrète, ni continue. Indépendance, densité d'une somme de deux variables aléatoires à densité comme convolée des deux densités (la convergence du produit de convolution est admise).
- **Espérance, variance et moments.** « Admettre une espérance » en terme de convergence absolue d'une intégrale, valeur de l'espérance pour une variable aléatoire admettant une espérance. Exemples. Cas d'une densité paire. Espérance d'une fonction affine. Théorème du transfert. Variance, moments, écart-type. Propriétés de la variance.

Retour sur les inégalités de concentration, nouvelle preuve de l'inégalité de Markov dans le cas à densité. Loi faible des grands nombres.

— **Lois usuelles.** Loi uniforme, fonction de répartition, expression de l'espérance et de la variance, influence d'une fonction affine sur une loi uniforme. Simulation.
Loi exponentielle, fonction de répartition, expression de l'espérance et de la variance, influence de la fonction $x \longmapsto x/\lambda$ avec $\lambda > 0$ sur une loi exponentielle de paramètre un. Propriété d'absence de mémoire. Simulation : par la méthode d'inversion d'une part, et la fonction `rvs` du module `scipy.stats` de Python) d'autre part.
Loi normale centré réduite, et loi normale. Densité, fonction de répartition : caractère bijectif, équivalent en $+\infty$, propriétés. Espérance et variance. Tracé des densités gaussiennes en Python, tracé de la fonction de répartition approchée en utilisant la commande `norm.cdf` de `scipy.stats`. Simulation de la gaussienne standard en utilisant la méthode d'inversion, l'inverse de la fonction de répartition étant obtenu *via* la commande `norm.ppf`. Espérance, variance dans le cas général. Somme de deux gaussiennes indépendantes.

***Questions de cours.***

— Loi exponentielle : définition, valeur de l'espérance/variance sans démonstration, fonction de répartition, simulation en montrant que $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ avec les notations du cours. *Merci aux colleurs de rappeler cette expression en cas de besoin*

— Loi normale : densité de la $\mathscr{N}(0,1)$. Montrer que $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu,\sigma^2) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ avec $\sigma > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. En déduire espérance/variance de la $\mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$ en admettant celles de la $\mathscr{N}(0,1)$.

— Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathscr{R}(1/2)$ $\left(\varepsilon(\Omega) = \{-1,1\}, \mathbf{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(\varepsilon = -1)\right)$, telles que $\varepsilon \perp\!\!\!\perp X$. Rappeler l'expression d'une densité de $X$, montrer que $Y = \varepsilon X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ (Exercice du TD).

# SEMAINE 16

# du 27 au 31/01/2020

*Au prochain programme : les fonctions de plusieurs variables puis les couples aléatoires discrets.*

## 1 [Maths] Variables aléatoires à densité

— **Généralités.** Définition d'une densité de probabilité. Définition d'une variable aléatoire à densité avec la fonction de répartition. Existence d'une variable aléatoire réelle de densité fixée. Non-unicité d'une densité. Trouver le support d'une variable aléatoire réelle à densité à partir d'une densité ou de la fonction de répartition. Lien entre densité et fonction de répartition lorsque cette dernière est continue et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. La fonction de répartition caractérise la loi. Deux variables aléatoires à densité de même loi ne sont pas forcément égales en tant qu'application. Une fonction affine (telle que « $a \neq 0$ ») d'une variable aléatoire à densité est à densité, expression explicite de la densité. Autres exemples de fonctions : exponentielle, logarithme de variables à densité. Exemple de variable aléatoire ni discrète, ni continue. Indépendance, densité d'une somme de deux variables aléatoires à densité comme convolée des deux densités (la convergence du produit de convolution est admise).

— **Espérance, variance et moments.** « Admettre une espérance » en terme de convergence absolue d'une intégrale, valeur de l'espérance pour une variable aléatoire admettant une espérance. Exemples. Cas d'une densité paire. Espérance d'une fonction affine. Théorème du transfert. Variance, moments, écart-type. Propriétés de la variance. Retour sur les inégalités de concentration, nouvelle preuve de l'inégalité de Markov dans le cas à densité. Loi faible des grands nombres.

— **Lois usuelles.** Loi uniforme, fonction de répartition, expression de l'espérance et de la variance, influence d'une fonction affine sur une loi uniforme. Simulation.
Loi exponentielle, fonction de répartition, expression de l'espérance et de la variance, influence de la fonction $x \longmapsto x/\lambda$ avec $\lambda > 0$ sur une loi exponentielle de paramètre un. Propriété d'absence de mémoire. Simulation : par la méthode d'inversion d'une part, et la fonction `rvs` du module `scipy.stats` de Python) d'autre part.
Loi normale centré réduite, et loi normale. Densité, fonction de répartition : caractère bijectif, équivalent en $+\infty$, propriétés. Espérance et variance. Tracé des densités gaussiennes en Python, tracé de la fonction de répartition approchée en utilisant la commande `norm.cdf` de `scipy.stats`. Simulation de la gaussienne standard en utilisant la méthode d'inversion, l'inverse de la fonction de répartition étant obtenu *via* la commande `norm.ppf`. Espérance, variance dans le cas général. Somme de deux gaussiennes indépendantes.

### *Questions de cours.*

— Énoncer la condition de régularité ($\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points) pour qu'une fonction de répartition soit celle d'une variable aléatoire à densité. Démontrer que si $X$ est à densité, alors $e^X$ possède une densité.

— Densité de $aX+b$ avec $X$ une variable aléatoire réelle à densité, et $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ : expression de la densité en fonction de celle de $X$, démonstration.

— Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire à densité. L'appliquer à $\mathbf{E}\left(X^2\right)$ où $X$ est une variable aléatoire à densité.

— Densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes. Application à $X+Y$ où $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X,Y \hookrightarrow \mathscr{U}[0,1]$.

— Loi exponentielle : définition, valeur de l'espérance/variance sans démonstration, fonction de répartition, simulation en montrant que $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ avec les notations du cours. *Merci aux colleurs de rappeler cette expression en cas de besoin*

— Loi normale : densité de la $\mathscr{N}(0,1)$. Montrer que $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu,\sigma^2) \iff \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ avec $\sigma > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. En déduire espérance/variance de la $\mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$ en admettant celles de la $\mathscr{N}(0,1)$.

— Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathscr{R}(1/2)$ $\left(\varepsilon(\Omega) = \{-1,1\}, \mathbf{P}(\varepsilon=1) = \dfrac{1}{2} = \mathbf{P}(\varepsilon=-1)\right)$, telles que $\varepsilon \perp\!\!\!\perp X$. Rappeler l'expression d'une densité de $X$, montrer que $Y = \varepsilon X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ (Exercice du TD).

# SEMAINE 15

# du 20 au 24/01/2020

*Au prochain programme : la fin des variables aléatoires à densité.*

## 1 [Maths] Variables aléatoires à densité

**Attention** Aucune loi usuelle pour le moment, sauf $\mathscr{U}[0,1]$. Les exercices les utilisant doivent donc rappeler la densité en question.

— **Généralités.** Définition d'une densité de probabilité. Définition d'une variable aléatoire à densité avec la fonction de répartition. Existence d'une variable aléatoire réelle de densité fixée. Non-unicité d'une densité. Trouver le support d'une variable aléatoire réelle à densité à partir d'une densité ou de la fonction de répartition. Lien entre densité et fonction de répartition lorsque cette dernière est continue et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. La fonction de répartition caractérise la loi. Deux variables aléatoires à densité de même loi ne sont pas forcément égales en tant qu'application. Une fonction affine (telle que « $a \neq 0$ ») d'une variable aléatoire à densité est à densité, expression explicite de la densité. Autres exemples de fonctions : exponentielle, logarithme de variables à densité. Exemple de variable aléatoire ni discrète, ni continue. Indépendance, densité d'une somme de deux variables aléatoires à densité comme convolée des deux densités (la convergence du produit de convolution est admise).

— **Espérance, variance et moments.** « Admettre une espérance » en terme de convergence absolue d'une intégrale, valeur de l'espérance pour une variable aléatoire admettant une espérance. Exemples. Cas d'une densité paire. Espérance d'une fonction affine. Théorème du transfert. Variance, moments, écart-type. Propriétés de la variance. Retour sur les inégalités de concentration, nouvelle preuve de l'inégalité de Markov dans le cas à densité. Loi faible des grands nombres.

***Questions de cours.***

— Définition d'une densité. Montrer que $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ est une densité.

— Énoncer la condition de régularité ($\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points) pour qu'une fonction de répartition soit celle d'une variable aléatoire à densité. Démontrer que si $X$ est à densité, alors $\mathrm{e}^X$ possède une densité.

— Énoncer la condition de régularité ($\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points) pour qu'une fonction de répartition soit celle d'une variable aléatoire à densité. Démontrer que si $X$ est à densité et que $X(\Omega) \subset \mathbf{R}^{+\star}$, alors $\ln(X)$ possède une densité.

— Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire à densité. L'appliquer à $\mathbf{E}\left(X^2\right)$ où $X$ est une variable aléatoire à densité.

— Densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes. Application à $X+Y$ où $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X,Y \hookrightarrow \mathscr{U}[0,1]$.

## 2 [Maths] Intégration

**Attention** Comme pour les séries, seul le théorème de comparaison est au programme. Ne pas hésiter à guider les étudiants sur la traduction des relations de comparaison en inégalités locales ou asymptotiques.

— **Primitives, intégration sur un segment.** Définition d'une primitive, existence pour les fonctions continues admise. Définition de l'intégrale comme le crochet d'une primitive pour les fonctions continues, extension aux fonctions continues par morceaux. Notion de valeur moyenne, et valeur moyenne pondérée. Propriétés de l'intégrale. Lien intégrale à borne variable & primitive. Intégrale à deux bornes variables. Intégrale nulle d'une fonction positive continue. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Intégration par parties, changement de variable. Intégrale d'une fraction rationnelle. Sommes de Riemann, théorème de convergence, intégration numérique (méthode des rectangles à gauche et droite).

— **Intégrales généralisées.** Généralités. Intégrale généralisée sur des intervalles du type $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$ avec $a,b \in \overline{\mathbf{R}}$. Intégrales faussement impropres. Contre-exemple du fait que la convergence de l'intégrale sur $[a,\infty[$ n'entraîne pas la convergence vers zéro de la fonction. Notion d'intégrale partielle, de reste d'intégrale. Extension aux intégrales de fonctions continues sauf en un nombre **fini** de points (l'intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux n'est quant à elle pas au programme). Critère de Riemann au voisinage de zéro et de $+\infty$, intégrale de Gauß (valeur admise). Propriétés de l'intégrale. Intégrale nulle d'une fonction positive. Intégration par parties, changements de variables dans les intégrales généralisées. Critères propres aux fonctions positives : les intégrales partielles sont monotones, critère de comparaison. Convergence absolue/intégrabilité. Intégrales semi-convergentes. Inégalité triangulaire, structure d'espace vectoriel des fonctions d'intégrale absolument convergente.

***Questions de cours.***

— Définir la notion d'intégrale absolument convergente et semi-convergente. Preuve de la convergence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Convergence absolue admise.

— Énoncé du théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives. Critère de Riemann au voisinage de zéro et démonstration.

# SEMAINE 14

# du 13 au 18/01/2020

*Au prochain programme : les variables aléatoires à densité.*

**Attention** Pour les exercices de diagonalisation, étant donné qu'il s'agit de la troisième semaine, on évitera les diagonalisations effectives de matrices $2 \times 2$ ou $3 \times 3$ si elles ne proviennent pas clairement d'un endomorphisme.

## 1 [Maths] Intégration

**Attention** Comme pour les séries, seul le théorème de comparaison est au programme. Ne pas hésiter à guider les étudiants sur la traduction en inégalités des relations de comparaison.

— **Primitives, intégration sur un segment.** Définition d'une primitive, existence pour les fonctions continues admise. Définition de l'intégrale comme le crochet d'une primitive pour les fonctions continues, extension aux fonctions continues par morceaux. Notion de valeur moyenne, et valeur moyenne pondérée. Propriétés de l'intégrale. Lien intégrale à borne variable & primitive. Intégrale à deux bornes variables. Intégrale nulle d'une fonction positive continue. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Intégration par parties, changement de variable. Intégrale d'une fraction rationnelle. Sommes de Riemann, théorème de convergence, intégration numérique (méthode des rectangles à gauche et droite).

— **Intégrales généralisées.** Généralités. Intégrale généralisée sur des intervalles du type $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$ avec $a,b \in \overline{\mathbf{R}}$. Intégrales faussement impropres. Contre-exemple du fait que la convergence de l'intégrale sur $[a,\infty[$ n'entraîne pas la convergence vers zéro de la fonction. Notion d'intégrale partielle, de reste d'intégrale. Extension aux intégrales de fonctions continues sauf en un nombre **fini** de points (l'intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux n'est quant à elle pas au programme). Critère de Riemann au voisinage de zéro et de $+\infty$, intégrale de Gauß (valeur admise). Propriétés de l'intégrale. Intégrale nulle d'une fonction positive. Intégration par parties, changements de variables dans les intégrales généralisées. Critères propres aux fonctions positives : les intégrales partielles sont monotones, critère de comparaison. Convergence absolue/intégrabilité. Intégrales semi-convergentes. Inégalité triangulaire, structure d'espace vectoriel des fonctions d'intégrale absolument convergente.

***Questions de cours.***

— Formule de changement de variable, énoncé et démonstration. Exemple simple au choix du colleur.

— Formule d'intégration par parties, énoncé et démonstration. Exemple simple au choix du colleur.

— Énoncé du théorème de convergence des sommes de Riemann. Fonction Python implémentant la méthode des rectangles à gauche.

— Définir la notion d'intégrale absolument convergente et semi-convergente. Preuve de la convergence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Convergence absolue admise.

— Énoncé du théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives. Critère de Riemann au voisinage de zéro et démonstration.

## 2 [Maths] Diagonalisation

**Attention** Sur les polynômes annulateurs : j'ai seulement précisé que les racines étaient incluses dans les racines. Aucun autre résultat spécifique n'est au programme.

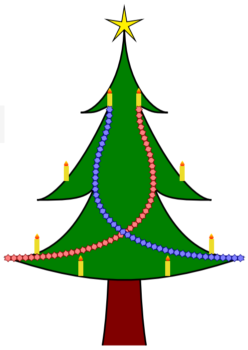
— **Éléments propres.** Définition, réecriture de la définition, lien entre la vision endomorphisme/matrice associée dans une base. Exemples de calcul d'éléments propres. Détermination pratique à l'aide du pivot de Gauß (système linéaire à paramètre), et du déterminant **en dimension deux uniquement**. Valeurs propres d'une matrice triangulaire. Écriture du spectre comme les racines d'un polynôme en dimension deux, on admet cela dans le cas général puis on déduit que le spectre complexe est toujours non vide. Polynômes de matrices, utilisation d'un polynôme annulateur pour le calcul du spectre.

— **Critère de diagonalisation.** Liberté d'une famille de vecteurs propres, nombre maximal de valeurs propres, notion d'endomorphisme diagonalisable, critère principal : un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des espaces propres vaut la dimension de l'espace ambiant. Corollaire dans le cas de valeurs propres distinctes au nombre de $\dim E$. Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres. Théorème spectral (admis).

— **Applications** Recherches de racines de matrices, calculs de commutants, expression de récurrences linéaires en fonction de $n$.

# SEMAINE 13

# du 16 au 20/12/2019



**Attention** Pas de colles la semaine de la rentrée, un concours blanc est prévu.

*Au programme de la seconde semaine de la rentrée : la fin de l'intégration.*

## 1 [Maths] Intégration

— **Primitives, intégration sur un segment.** Définition d'une primitive, existence pour les fonctions continues admise. Définition de l'intégrale comme le crochet d'une primitive pour les fonctions continues, extension aux fonctions continues par morceaux. Notion de valeur moyenne, et valeur moyenne pondérée. Propriétés de l'intégrale. Lien intégrale à borne variable & primitive. Intégrale à deux bornes variables. Intégrale nulle d'une fonction positive continue. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Intégration par parties, changement de variable. Intégrale d'une fraction rationnelle. Sommes de Riemann, théorème de convergence, intégration numérique (méthode des rectangles à gauche et droite).

***Questions de cours.***

— Formule de changement de variable, énoncé et démonstration. Exemple simple au choix du colleur.

— Formule d'intégration par parties, énoncé et démonstration. Exemple simple au choix du colleur.

— Énoncé du théorème de convergence des sommes de Riemann. Fonction Python implémentant la méthode des rectangles à gauche.

## 2 [Maths] Diagonalisation

**Attention**

1. Sur les polynômes annulateurs : j'ai seulement précisé que les racines étaient incluses dans les racines. Aucun autre résultat spécifique n'est au programme.

2. Aucun exercice n'aura été fait d'ici aux colles du Mardi, seulement les exemples du cours.

— **Éléments propres.** Définition, réecriture de la définition, lien entre la vision endomorphisme/matrice associée dans une base. Exemples de calcul d'éléments propres. Détermination pratique à l'aide du pivot de Gauß (système linéaire à paramètre), et du déterminant **<u>en dimension deux uniquement</u>**. Valeurs propres d'une matrice triangulaire. Écriture du spectre comme les racines d'un polynôme en dimension deux, on admet cela dans le cas général puis on déduit que le spectre complexe est toujours non vide. Polynômes de matrices, utilisation d'un polynôme annulateur pour le calcul du spectre.

— **Critère de diagonalisation.** Liberté d'une famille de vecteurs propres, nombre maximal de valeurs propres, notion d'endomorphisme diagonalisable, critère principal : un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des espaces propres vaut la dimension de l'espace ambiant. Corollaire dans le cas de valeurs propres distinctes au nombre de $\dim E$. Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres. Théorème spectral (admis).

— **Applications** Recherches de racines de matrices, calculs de commutants, expression de récurrences linéaires en fonction de $n$.

***Questions de cours.***

— Définir les éléments propres pour une matrice, caractérisation. Montrer que les éléments propres d'une matrice triangulaire supérieure sont les éléments diagonaux.

— Définir les éléments propres pour un endomorphisme. Montrer qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre, déduire une majoration sur le nombre maximal de valeurs propres distinctes.

— Définir les éléments propres pour une matrice. Critère de diagonalisation pour une matrice en fonction des dimensions des espaces propres (énoncé).

— Définir la notion de polynôme annulateur pour une matrice carré. Lien sans démonstration entre les racines de ce polynôme et les valeurs propres. Application : condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A^2 - 10A + 25I_n = 0$ soit diagonalisable.

# SEMAINE 12

# du 09 au 13/12/2019

*Au programme de la semaine prochaine : on ajoute des révisions d'intégration, puis les intégrales généralisées.*

## 1 [Maths] Diagonalisation

**Attention**

❶ Sur les polynômes annulateurs : j'ai seulement précisé que les racines étaient incluses dans les racines. Aucun autre résultat spécifique n'est au programme.

❷ Aucun exercice n'aura été fait d'ici aux colles du Mardi, seulement les exemples du cours.

— **Éléments propres.** Définition, réecriture de la définition, lien entre la vision endomorphisme/matrice associée dans une base. Exemples de calcul d'éléments propres. Détermination pratique à l'aide du pivot de Gauß (système linéaire à paramètre), et du déterminant **en dimension deux uniquement**. Valeurs propres d'une matrice triangulaire. Écriture du spectre comme les racines d'un polynôme en dimension deux, on admet cela dans le cas général puis on déduit que le spectre complexe est toujours non vide. Polynômes de matrices, utilisation d'un polynôme annulateur pour le calcul du spectre.

— **Critère de diagonalisation.** Liberté d'une famille de vecteurs propres, nombre maximal de valeurs propres, notion d'endomorphisme diagonalisable, critère principal : un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des espaces propres vaut la dimension de l'espace ambiant. Corollaire dans le cas de valeurs propres distinctes au nombre de $\dim E$. Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres. Théorème spectral (admis).

— **Applications** Recherches de racines de matrices, calculs de commutants, expression de récurrences linéaires en fonction de $n$. **Les calculs de commutants ne seront vus que Mardi.**

***Questions de cours.***

— Définir les éléments propres pour une matrice, caractérisation. Montrer que les éléments propres d'une matrice triangulaire supérieure sont les éléments diagonaux.

— Définir les éléments propres pour un endomorphisme. Montrer qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre, déduire une majoration sur le nombre maximal de valeurs propres distinctes.

— Définir les éléments propres pour une matrice. Critère de diagonalisation pour une matrice en fonction des dimensions des espaces propres (énoncé).

— Définir la notion de polynôme annulateur pour une matrice carré. Lien sans démonstration entre les racines de ce polynôme et les valeurs propres. Application : condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A^2 - 10A + 25I_n = 0$ soit diagonalisable.

## 2 [Maths] Variables aléatoires : Généralités & Cas Discret

— **Variables aléatoires.** Définition, reformulation, propriétés : stabilité par combinaison linéaire, min/max et produit. Notion de fonction de répartition et de loi. Implication $X = Y \implies \mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$, contre-exemple pour la réciproque. Propriétés générales de la fonction de répartition (analytiques et probabilistes), et réciproque (condition suffisante pour qu'une fonction numérique soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle). Représentation par histogramme d'une loi.

— **Variables aléatoires discrètes.** Définition et reformulation de la notion de mesurabilité dans le cas discret. Système complet et quasi-complet associé à une variable aléatoire réelle discrète. Loi et loi conditionnelle sachant un évènement non négligeable. La fonction de répartition caractérise la loi. Propriétés des variables aléatoires réelles discrètes : stabilité par combinaison linéaire, min/max, produit, et par application d'une fonction (& loi de cette dernière). Condition suffisante d'existence d'une variable aléatoire réelle discrète connaissant une famille de somme un. Indépendance de variables aléatoires réelles discrètes : définition, lemme des coalitions, fonctionnelles de variables indépendantes, loi d'un min/max de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes. Espérance d'un produit/variance d'une somme de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes (formules admises en attendant le chapitre sur les vecteurs aléatoires).

— **Espérance, Variance, Moments.** Définition, cas où le support, est fini. Propriétés : positivité, linéarité (admise), croissance. Formule des cumulants et application au calcul de l'espérance d'un min/max. Théorème du transfert et application à une fonction affine d'une variable aléatoire discrète. Moments, variance, écart-type. Propriétés de la variance. Centrée/réduite d'une variable aléatoire discrète. Inégalités de concentration : Markov, Markov avec des puissances et Bienaymé-Tchebychev. Notion de suite i.i.d., et moyenne empirique d'une telle suite. Application à la loi faible des grands nombres.

— **Lois discrètes usuelles.** Lois à support fini : uniforme discrète sur un ensemble fini, Bernoulli, binomiale, hypergéométrique (définition, propriétés et simulation). Géométrique : définition, propriétés et propriété d'absence de mémoire notamment (je n'ai pas démontré que c'était la seule loi discrète de support $\mathbf{N}$ à absence de mémoire). Poisson : définition, propriétés, simulation.

> **Attention**
>
> — La technique générale de simulation à l'aide du pseudo-inverse de la fonction de répartition n'est pas au programme. J'ai seulement donné **quelques idées** pour motiver la technique de simulation de la loi de Poisson.
>
> — Les étudiants doivent savoir simuler les lois précédentes **sans utiliser les fonctions existantes** de Python (par exemple le sous module `numpy.random`), *i.e.* en se ramenant à l'uniforme sur $[0,1]$.
>
> — Les résultats de convergence entre Binomiale/Poisson et Hypergéométrique/Binomiale arriveront dans un prochain chapitre.

***Questions de cours.***

— Énoncer la loi faible des grands nombres. Démonstration en admettant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

— Loi binomiale : loi et simulation, expression de l'espérance et variance sans démonstration. Énoncer, **avec un vocabulaire précis**, l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit.

— Loi Géométrique : loi et simulation, expression de l'espérance et variance sans démonstration. Expression de la fonction de répartition sans démonstration. Énoncer, **avec un vocabulaire précis**, l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit.

— Loi de Poisson : loi, expression de l'espérance et variance avec démonstration.

# SEMAINE 11

# du 02 au 06/12/2019

*Au programme de la semaine prochaine : toute la diagonalisation. Cette semaine on ajoute les lois usuelles.*

## 1 [Maths] Variables aléatoires : Généralités & Cas Discret

— **Variables aléatoires.** Définition, reformulation, propriétés : stabilité par combinaison linéaire, min/max et produit. Notion de fonction de répartition et de loi. Implication $X = Y \implies \mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$, contre-exemple pour la réciproque. Propriétés générales de la fonction de répartition (analytiques et probabilistes), et réciproque (condition suffisante pour qu'une fonction numérique soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle). Représentation par histogramme d'une loi.

— **Variables aléatoires discrètes.** Définition et reformulation de la notion de mesurabilité dans le cas discret. Système complet et quasi-complet associé à une variable aléatoire réelle discrète. Loi et loi conditionnelle sachant un évènement non négligeable. La fonction de répartition caractérise la loi. Propriétés des variables aléatoires réelles discrètes : stabilité par combinaison linéaire, min/max, produit, et par application d'une fonction (& loi de cette dernière). Condition suffisante d'existence d'une variable aléatoire réelle discrète connaissant une famille de somme un. Indépendance de variables aléatoires réelles discrètes : définition, lemme des coalitions, fonctionnelles de variables indépendantes, loi d'un min/max de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes. Espérance d'un produit/variance d'une somme de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes (formules admises en attendant le chapitre sur les vecteurs aléatoires).

— **Espérance, Variance, Moments.** Définition, cas où le support, est fini. Propriétés : positivité, linéarité (admise), croissance. Formule des cumulants et application au calcul de l'espérance d'un min/max. Théorème du transfert et application à une fonction affine d'une variable aléatoire discrète. Moments, variance, écart-type. Propriétés de la variance. Centrée/réduite d'une variable aléatoire discrète. Inégalités de concentration : Markov, Markov avec des puissances et Bienaymé-Tchebychev. Notion de suite i.i.d., et moyenne empirique d'une telle suite. Application à la loi faible des grands nombres.

— **Lois discrètes usuelles.** Lois à support fini : uniforme discrète sur un ensemble fini, Bernoulli, binomiale, hypergéométrique (définition, propriétés et simulation). Géométrique : définition, propriétés et propriété d'absence de mémoire notamment (je n'ai pas démontré que c'était la seule loi discrète de support $\mathbf{N}$ à absence de mémoire). Poisson : définition, propriétés, simulation.

> **Attention**
>
> — La technique générale de simulation à l'aide du pseudo-inverse de la fonction de répartition n'est pas au programme. J'ai seulement donné **quelques idées** pour motiver la technique de simulation de la loi de Poisson.
>
> — Les étudiants doivent savoir simuler les lois précédentes **sans utiliser les fonctions existantes** de Python (par exemple le sous module `numpy.random`), *i.e.* en se ramenant à l'uniforme sur $[0,1]$.
>
> — Les résultats de convergence entre Binomiale/Poisson et Hypergéométrique/Binomiale arriveront dans un prochain chapitre.

***Questions de cours.***

— Définition de l'espérance. Calcul de $\mathbf{E}(X)$ lorsque : $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, **et** $X = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathscr{T}$.

— Définition d'une fonction de répartition pour une variable aléatoire réelle. Preuve de la propriété de croissance. Énoncer sans démonstration les propriétés de limite et de monotonie.

— Énoncer le théorème du transfert, définition de la variance. Énoncer et démontrer : la formule de König-Huygens, et la variance d'une expression affine.

— Énoncer la loi faible des grands nombres. Démonstration en admettant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

— Loi binomiale : loi et simulation, expression de l'espérance et variance sans démonstration. Énoncer, **avec un vocabulaire précis**, l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit.

— Loi Géométrique : loi et simulation, expression de l'espérance et variance sans démonstration. Expression de la fonction de répartition sans démonstration. Énoncer, **avec un vocabulaire précis**, l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit.

— Loi de Poisson : loi, expression de l'espérance et variance avec démonstration.

# SEMAINE 10

# du 25 au 29/11/2019

*Au programme de la semaine prochaine : le début de la diagonalisation.*

## 1 [Maths] Variables aléatoires : Généralités & Cas Discret

**Attention**
— Les lois usuelles n'ont pas encore été vues. On peut néanmoins déjà proposer des exercices faisant appel aux lois à support fini de première année : uniforme, Bernoulli, binomiale et hypergéométrique.

— **Variables aléatoires.** Définition, reformulation, propriétés : stabilité par combinaison linéaire, min/max et produit. Notion de fonction de répartition et de loi. Implication $X = Y \implies \mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$, contre-exemple pour la réciproque. Propriétés générales de la fonction de répartition (analytiques et probabilistes), et réciproque (condition suffisante pour qu'une fonction numérique soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle). Représentation par histogramme d'une loi.

— **Variables aléatoires discrètes.** Définition et reformulation de la notion de mesurabilité dans le cas discret. Système complet et quasi-complet associé à une variable aléatoire réelle discrète. Loi et loi conditionnelle sachant un évènement non négligeable. La fonction de répartition caractérise la loi. Propriétés des variables aléatoires réelles discrètes : stabilité par combinaison linéaire, min/max, produit, et par application d'une fonction (& loi de cette dernière). Condition suffisante d'existence d'une variable aléatoire réelle discrète connaissant une famille de somme un. Indépendance de variables aléatoires réelles discrètes : définition, lemme des coalitions, fonctionnelles de variables indépendantes, loi d'un min/max de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes. Espérance d'un produit/variance d'une somme de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes (formules admises en attendant le chapitre sur les vecteurs aléatoires).

— **Espérance, Variance, Moments.** Définition, cas où le support, est fini. Propriétés : positivité, linéarité (admise), croissance. Formule des cumulants et application au calcul de l'espérance d'un min/max. Théorème du transfert et application à une fonction affine d'une variable aléatoire discrète. Moments, variance, écart-type. Propriétés de la variance. Centrée/réduite d'une variable aléatoire discrète. Inégalités de concentration : Markov, Markov avec des puissances et Bienaymé-Tchebychev. Notion de suite i.i.d., et moyenne empirique d'une telle suite. Application à la loi faible des grands nombres.

***Questions de cours.***

— Définition de l'espérance. Calcul de $\mathbf{E}(X)$ lorsque : $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, **et** $X = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathscr{T}$.

— Définition d'une fonction de répartition pour une variable aléatoire réelle. Preuve de la propriété de croissance. Énoncer sans démonstration les propriétés de limite et de monotonie.

— Énoncer le théorème du transfert, définition de la variance. Énoncer et démontrer : la formule de König-Huygens, et la variance d'une expression affine.

— Énoncer la loi faible des grands nombres. Démonstration en admettant l'inégalité de Markov (et sa version avec un moment d'ordre 2 dans le majorant).

## 2 [Maths] Dénombrement & Espaces probabilisés

*Le but du chapitre est uniquement de généraliser les espaces probabilisés aux univers quelconques. Dans la suite du cours ils seront le plus souvent au plus dénombrables. J'ai fait relativement peu d'exercices de révision de dénombrement, on pourra donc commencer la colle par un exercice très simple sur le sujet.*

— **Dénombrement.** Fonction indicatrice d'un ensemble et propriétés. Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal. Listes, permutations, combinaisons, cardinaux associés. Propriétés des coefficients binomiaux.

— **Axiomatique des probabilités.** Univers et espaces probabilisables, notion de tribu. Propriétés des tribus. Notion de probabilité, ensembles certains/négligeables, propriétés d'une probabilité, majoration de la probabilité d'une réunion *a priori* non dis-jointe. L'ensemble des proabbilités n'est un pas un sous-espace vectoriel de $[0,1]^{\mathscr{T}}$, mais stable par combinaison convexe. Nombreux exemples d'expériences aléatoires, y compris le jeu de pile/face infini où l'existence d'une tribu contenant les évènements cylindriques est admise. Existence d'une probabilité associée à une famille (finie ou dénombrable) de somme un. Conditionnement & indépendance, formules de Bayes, des probabilités totales, des probabilités composées. Indépendance d'évènements : définition. Indépendance par rapport au complémentaire.

***Questions de cours.***

— Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{T})$. Formule des probabilités totales : énoncé et démonstration.

— Formule des probabilités composées : énoncé et démonstration.

— Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{T})$. Formules donnant la probabilité de $B\setminus A$, d'une réunion $A\cup B$ et monotonie $A\subset B \implies \mathbf{P}(A)\leqslant\mathbf{P}(B)$ où $A,B\in\mathscr{T}$ : énoncés et démonstrations.

# SEMAINE 9

# du 18 au 22/11/2019

## 1 [Maths] Dénombrement & Espaces probabilisés

*Le but du chapitre est uniquement de généraliser les espaces probabilisés aux univers quelconques. Dans la suite du cours ils seront le plus souvent au plus dénombrables. J'ai fait relativement peu d'exercices de révision de dénombrement, on pourra donc commencer la colle par un exercice très simple sur le sujet.*

— **Dénombrement.** Fonction indicatrice d'un ensemble et propriétés. Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal. Listes, permutations, combinaisons, cardinaux associés. Propriétés des coefficients binomiaux.

— **Axiomatique des probabilités.** Univers et espaces probabilisables, notion de tribu. Propriétés des tribus. Notion de probabilité, ensembles certains/négligeables, propriétés d'une probabilité, majoration de la probabilité d'une réunion *a priori* non dis-jointe. L'ensemble des proabbilités n'est un pas un sous-espace vectoriel de $[0,1]^{\mathscr{T}}$, mais stable par combinaison convexe. Nombreux exemples d'expériences aléatoires, y compris le jeu de pile/face infini où l'existence d'une tribu contenant les évènements cylindriques est admise. Existence d'une probabilité associée à une famille (finie ou dénombrable) de somme un. Conditionnement & indépendance, formules de Bayes, des probabilités totales, des probabilités composées. Indépendance d'évènements : définition. Indépendance par rapport au complémentaire.

***Questions de cours.***

— Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{T})$. Formule des probabilités totales : énoncé et démonstration.

— Formule des probabilités composées : énoncé et démonstration.

— Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{T})$. Formules donnant la probabilité de $B\setminus A$, d'une réunion $A\cup B$ et monotonie $A\subset B \implies \mathbf{P}(A)\leqslant \mathbf{P}(B)$ où $A,B\in\mathscr{T}$ : énoncés et démonstrations.

## 2 [Maths] Suites & Séries Numériques

**Attention** Le cours sur les séries ne comporte notamment pas : la règle de D'Alembert, les théorèmes de comparaison de séries à termes positifs exprimés sous forme de relation o() ou ∼. Les étudiants doivent donc se ramener à des inégalités (éventuellement découlant des o() ou ∼). Le critère de Riemann a été vu, mais n'est pas non plus au programme : les étudiants sont donc censés se ramener à $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ et $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ uniquement, seules séries remarquables au programme (avec les séries géométriques, géométriques dérivées, et exponentielle).

— **Suites numériques.** Définition d'une suite, méthode informatique pour représenter les termes successifs d'une suite, monotonie et borne. Notion de limite en un élément de $\overline{\mathbf{R}}$, passages à la limite, propriétés de la limite. Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration. Convergence des suites extraites paires/impaires (attention, pas de résultats sur les autres sous-suites extraites au programme). Limite monotone. Brève extension aux suites complexes. Suites remarquables : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux et récurrences générales à un pas du type $u_{n+1}=f(u_n)$. Pour ces dernières, quelques exemples ont été vus, mais aucun résultat général n'est au programme : les étudiants doivent donc être capables de justifier les éventuelles propriétés utilisées. Suites implicites, exemple complet traité en cours.

— **Séries numériques.** Généralités : notion de somme partielle, convergence/divergence d'une série, reste d'une série convergente, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes et somme associée. Séries remarquables : géométrique, géométrique dérivée (convergence provisoirement admise, la valeur de la somme sera admise), série exponentielle (valeur de la somme admise), divergence de la série harmonique, convergence de la série $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$, convergence de $\left(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ vers $\ln 2$ : la preuve a été faite en TD. Condition nécessaire de convergence et divergence grossière. Lien suite/série *via* les séries téléscopiques. Séries à termes positifs, monotonie de la somme partielle dans ce cas, critère de comparaison des séries à termes positifs. Séries de Riemann & technique de comparaison série-intégrale ( [H.P] ). Séries à termes quelconques : partie positive/négative d'une suite, convergence absolue, la convergence absolue implique celle des parties positives et négatives. Structure d'espace vectoriel des séries absolument convergentes. Inégalité triangulaire généralisée.

### *Questions de cours.*

— Soit $(u_n)$ une suite. Définir précisément « $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge », « $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge absolument ». Démonstration du fait que $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge.

— Nature de la série $\left(\sum \frac{1}{n\ \ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ par comparaison série-intégrale.

— Énoncer le critère de comparaison de séries à termes positifs. Application à $\left(\sum \frac{1}{2n+1}\right)_{n\geqslant 1}$.

## 3 [Info] Révisions de première année & Compléments

*Reprise du programme de début d'année.*

— **Rappels généraux.** Reprise des principaux types et notamment les listes.

— **Syntaxe d'une fonction.** Quelques scripts classiques

— **Tests logiques et boucles.** Syntaxe et nombreux exemples.

### *Scripts de cours.*

❶ Fonction qui crée la somme des éléments d'une liste. Fonction qui détermine si un élément est présent dans une liste sans utiliser `in`.

❷ Fonction qui calcule le maximum d'une liste, et qui renvoie la liste des positions où il est présent.

*Au programme de la semaine prochaine : les variables aléatoires discrètes.*

# SEMAINE 8

# du 12 au 15/11/2019

## 1 [Maths] Suites & Séries Numériques

**Attention** Le cours sur les séries ne comporte notamment pas : la règle de D'Alembert, les théorèmes de comparaison de séries à termes positifs exprimés sous forme de relation o() ou ~. Les étudiants doivent donc se ramener à des inégalités (éventuellement découlant des o() ou ~). Le critère de Riemann a été vu, mais n'est pas non plus au programme : les étudiants sont donc censés se ramener à $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ et $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ uniquement, seules séries remarquables au programme (avec les séries géométriques, géométriques dérivées, et exponentielle).

— **Suites numériques.** Définition d'une suite, méthode informatique pour représenter les termes successifs d'une suite, monotonie et borne. Notion de limite en un élément de $\overline{\mathbf{R}}$, passages à la limite, propriétés de la limite. Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration. Convergence des suites extraites paires/impaires (attention, pas de résultats sur les autres sous-suites extraites au programme). Limite monotone. Brève extension aux suites complexes. Suites remarquables : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux et récurrences générales à un pas du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour ces dernières, quelques exemples ont été vus, mais aucun résultat général n'est au programme : les étudiants doivent donc être capables de justifier les éventuelles propriétés utilisées. Suites implicites, exemple complet traité en cours.

— **Séries numériques.** Généralités : notion de somme partielle, convergence/divergence d'une série, reste d'une série convergente, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes et somme associée. Séries remarquables : géométrique, géométrique dérivée (convergence provisoirement admise, la valeur de la somme sera admise), série exponentielle (valeur de la somme admise), divergence de la série harmonique, convergence de la série $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$, convergence de $\left(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ vers $\ln 2$ : la preuve a été faite en TD. Condition nécessaire de convergence et divergence grossière. Lien suite/série *via* les séries téléscopiques. Séries à termes positifs, monotonie de la somme partielle dans ce cas, critère de comparaison des séries à termes positifs. Séries de Riemann & technique de comparaison série-intégrale ( [H.P] ). Séries à termes quelconques : partie positive/négative d'une suite, convergence absolue, la convergence absolue implique celle des parties positives et négatives. Structure d'espace vectoriel des séries absolument convergentes. Inégalité triangulaire généralisée.

***Questions de cours.***

— Suites adjacentes : définition, propriété de convergence (énoncé uniquement), application à la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
*La majoration du reste a été vue en cours mais n'est pas attendue ici*

— Script Python traçant les termes de la suite récurrente $u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

— Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : expression du terme général en fonction de $n$ (cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$).

— Étude de la suite récurrente $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$ avec $u_0 \geqslant 0$.

— Étude de la suite implicite $(x_n)$ telle que : $\quad nx_n + \ln(x_n) = 0$. Existence, monotonie, convergence et limite.

— Soit $(u_n)$ une suite. Définir précisément « $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge », « $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge absolument ». Démonstration du fait que $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge.

— Nature de la série $\left(\sum \frac{1}{n\ \ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ par comparaison série-intégrale.

— Énoncer le critère de comparaison de séries à termes positifs. Application à $\left(\sum \frac{1}{2n+1}\right)_{n\geqslant 1}$.

## 2 [Info] Révisions de première année & Compléments

*Reprise du programme de début d'année.*

— **Rappels généraux.** Reprise des principaux types et notamment les listes.

— **Syntaxe d'une fonction.** Quelques scripts classiques

— **Tests logiques et boucles.** Syntaxe et nombreux exemples.

### *Scripts de cours.*

❶ Fonction qui crée la somme des éléments d'une liste. Fonction qui détermine si un élément est présent dans une liste sans utiliser `in`.

❷ Fonction qui calcule le maximum d'une liste, et qui renvoie la liste des positions où il est présent.

*Au programme de la semaine prochaine : l'axiomatique des probabilités, puis les probabilités discrètes.*

# SEMAINE 7

# du 04 au 08/11/2019

## 1 [Maths] Équations différentielles

Ce chapitre est un chapitre de révisions de première année, contenant quelques compléments.

> **Attention** De manière générale il convient, pour l'ordre deux, de guider les étudiants pour des recherches de solutions particulières

— **Généralités sur les équations différentielles linéaires d'ordre $n$ :** structure de l'ensemble des solutions, principe de superposition. Lien entre solutions réelles et complexes.

— **Équations différentielles linéaires d'ordre un :** écriture des résultats précédents dans ce cas, forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (variation de la constante et second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t}\left(P(t)\cos(\beta t) + Q(t)\sin(\beta t)\right)$$

nous avons vu une méthode avec des exponentielles complexes.

— **Équations différentielles linéaires d'ordre deux :** écriture des résultats généraux dans ce cas, forme des solutions de l'homogène. Méthode de recherche d'une solution particulière (second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t}\left(P(t)\cos(\beta t) + Q(t)\sin(\beta t)\right)$$

nous avons vu la méthode avec des exponentielles complexes. Pour l'ordre deux, la recherche d'une solution particulière doit être guidée.

> **Attention** La méthode de variation des constantes n'est pas au programme.

— **Modèles de dynamique des populations :** modèle de Malthus, modèles à capacité de milieu (Verhulst et Gompertz), introduction au système proie/prédateur de Lokta-Volterra.

— **Méthodes numériques :** présentation de la méthode d'Euler et premier exemple (approximation de l'exponentielle). [H.P] Pour l'ordre deux : approximation de la dérivée seconde par un taux, ou réduction de l'ordre.

*Questions de cours / Exercice typique.*

❶ Expression explicite de l'unique solution à un problème de Cauchy d'ordre 1.

❷ Présentation de la méthode d'Euler, et son implémentation en Python. Application à une équation différentielle choisie par le colleur.

## 2 [Maths] Suites & Séries Numériques

La partie sur les suites est une partie de révisions de première année : on peut déjà largement proposer des exercices en lien avec les séries (séries alternées, divergence/convergence de certaines séries usuelles par convergence/divergence monotone, *etc.*).

— **Suites numériques.** Définition d'une suite, méthode informatique pour représenter les termes successifs d'une suite, monotonie et borne. Notion de limite en un élément de $\overline{\mathbf{R}}$, passages à la limite, propriétés de la limite. Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration. Convergence des suites extraites paires/impaires (attention, pas de résultats sur les autres sous-suites extraites au programme). Limite monotone. Brève extension aux suites complexes. Suites remarquables : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux et récurrences générales à un pas du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour ces dernières, quelques exemples ont été vus, mais aucun résultat général n'est au programme : les étudiants doivent donc être capables de justifier les éventuelles propriétés utilisées. Suites implicites, exemple complet traité en cours.

***Questions de cours.***

— Suites adjacentes : définition, propriété de convergence (énoncé uniquement), application à la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

*La majoration du reste a été vue en cours mais n'est pas attendue ici*

— Suites géométriques : définition, expression en fonction de $n$, convergence : énoncé. Expression de la somme des premiers termes : énoncé et démonstration.

— Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : expression du terme général en fonction de $n$ (cas $\mathbf{K}=\mathbf{R}$).

— Étude de la suite récurrente $u_{n+1}=\sqrt{4+3u_n}$ avec $u_0 \geqslant 0$.

— Étude de la suite implicite $(x_n)$ telle que : $nx_n+\ln(x_n)=0$. Existence, monotonie, convergence et limite.

## 3 [Info] Introduction à la complexité/récursivité algorithmique. Tris.

— **Récursivité.** Présentation de la structure d'une fonction récursive, exemples classiques (suites récurrentes, factorielle d'un entier). [3]

— **Tris** Fonction qui détermine si une liste est triée en ordre croissant. Reprise du tri par insertion, tri bulles, tri par sélection (du minimum) vus en première année. Tri rapide, version récursive.

— **Complexité** Définitions et mesures à l'aide du module `time`.

***Scripts de cours.***

❶ Fonction Python implémentant le tri rapide de manière récursive.

## 4 [Info] Tableaux Numpy. Utilisation en Algèbre linéaire & Imagerie.

— **Tableaux `numpy` & Matrices.** Généralités sur les tableaux, fonctions principales à connaitre. Opérations sur les matrices gérées par `numpy`.

*Au programme de la semaine suivante : le début des suites et séries.*

[3] Aucune dextérité en récursivité n'est attendue en BCPST.

# SEMAINE 6

# du 14 au 18/10/2019

**Attention** Cette semaine, on ne proposera des exercices sur les matrices que s'ils contiennent des questions d'Info (*c.f.* TP2, construction à l'aide de `zeros` ou `ones` et manipulations élémentaires). Ces questions pouvant être complétées par des résultats mathématiques.

## 1 [Maths] Calcul Matriciel. Représentation matricielle des objets linéaires.

— **Calcul Matriciel.** Définition d'une matrice, opérations, structure d'espace vectoriel. Base canonique et matrices élémentaires. Transposition, propriétés. Inversion, propriétés. Cas particulier des matrices de dimension deux, déterminant en dimension deux. Algorithme d'échelonnement (et réduit éventuellement) en ligne. Présentation de l'algorithme pour le calcul de l'inverse (méthode du miroir). Définition d'une valeur propre en terme de non inversibilité/rang. Calculs pratiques de valeurs propres. Matrices remarquables.

— **Représentation matricielle des objets linéaires.** Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs. Matrice d'une application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice, comme une application entre vecteurs colonnes. Noyau et image d'une matrice sont définis comme ceux de l'application linéaire canoniquement associée. Propriétés. Matrices de passage et changements de base. Relation de similitude et application aux calculs de puissance.

## 2 [Maths] Fonctions d'une variable réelle.

*Révisions de première année : quelques notions ont été revues en cours. Ne pas hésiter dans ce chapitre à disperser des questions d'informatique dans les exercices (tracés de courbes, algorithme de dichotomie pour la recherche de zéros d'équations et l'adaptation à la recherche de points fixes), classiques des planches Agro-Véto.*

— Généralités sur les fonctions : graphe, parité, périodicité, structures d'espace vectoriel et autres opérations *etc.*

— Limite en un point adhérent de l'ensemble de définition : définition « avec des $\varepsilon$ », limite à droite/gauche, caractérisation séquentielle, propriétés de la limite.

— Continuité : définition, version séquentielle, prolongements, théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, théorème des bornes atteintes (fonction continue sur un segment). Reformulations sur les images directes d'intervalles/segments par des fonctions continues.

— Dérivation : définition, propriétés, dérivée à droite/gauche, *extrema* et point critique intérieur au domaine de définition. Rolle, accroissements finis. Complément : fonctions lipschitziennes et dérivabilité des fonctions à valeurs complexes.

— Développements limités : propriétés (somme, produit, composition), formule de Taylor-Young, développements usuels à connaître. Applications.

### *Questions de cours / Exercice typique.*

❶ Citer le théorème de dérivation d'une bijection réciproque. Existence de la fonction $\operatorname{Arctan}$, formule de $\operatorname{Arctan}'$, et graphe.

❷ Définition de la partie entière. Graphe de la fonction partie entière. Étude de la continuité de $x \longmapsto \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$ et $x \longmapsto \lfloor x \rfloor \sin(x)$.

❸ Fonction résolvant de manière approchée l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie où $f$ est une fonction continue.

❹ Énoncer précisément la caractérisation séquentielle **de la limite.** Montrer que la fonction $x \in \mathbf{R}^\star \longmapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite lorsque $x \longrightarrow \infty$.

❺ Énoncer le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis. Application à l'estimation : $\forall x > 0, \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

❻ Énoncer la formule de Taylor-Young. L'appliquer pour retrouver le développement limité de l'exponentielle.

## 3 Équations différentielles

— Généralités sur les équations différentielles linéaires d'ordre $n$ : structure de l'ensemble des solutions, principe de superposition. Lien entre solutions réelles et complexes.

— Équations différentielles linéaires d'ordre un : écriture des résultats précédents dans ce cas, forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (variation de la constante et second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t}\left(P(t)\cos(\beta t) + Q(t)\sin(\beta t)\right)$$

nous avons vu une méthode avec des exponentielles complexes.

***Questions de cours / Exercice typique.***

❶ Expression explicite de l'unique solution à un problème de Cauchy d'ordre 1.

## 4 [Info] Introduction à la complexité/récursivité algorithmique. Tris.

— **Récursivité.** Présentation de la structure d'une fonction récursive, exemples classiques (suites récurrentes, factorielle d'un entier). [2]

— **Tris** Fonction qui détermine si une liste est triée en ordre croissant. Reprise du tri par insertion, tri bulles, tri par sélection (du minimum) vus en première année. Tri rapide, version récursive.

— **Complexité** Définitions et mesures à l'aide du module `time`.

***Scripts de cours.***

❶ Fonction qui trouve le minimum d'une liste et renvoie le premier indice d'apparition, puis une seconde fonction pour le tri par sélection du minimum.

❷ Fonction Python implémentant le tri rapide de manière récursive.

## 5 [Info] Tableaux Numpy. Utilisation en Algèbre linéaire & Imagerie.

— **Tableaux `numpy` & Matrices.** Généralités sur les tableaux, fonctions principales à connaitre. Opérations sur les matrices gérées par `numpy`.

*Au programme de la semaine suivante : le début des suites et séries.*

[2] Aucune dextérité en récursivité n'est attendue en BCPST.

# SEMAINE 5

# du 07 au 11/10/2019

## 1 [Maths] Calcul Matriciel. Représentation matricielle des objets linéaires.

— **Calcul Matriciel.** Définition d'une matrice, opérations, structure d'espace vectoriel. Base canonique et matrices élémentaires. Transposition, propriétés. Inversion, propriétés. Cas particulier des matrices de dimension deux, déterminant en dimension deux. Algorithme d'échelonnement (et réduit éventuellement) en ligne. Présentation de l'algorithme pour le calcul de l'inverse (méthode du miroir). Définition d'une valeur propre en terme de non inversibilité/rang. Calculs pratiques de valeurs propres. Matrices remarquables.

— **Représentation matricielle des objets linéaires.** Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs. Matrice d'une application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice, comme une application entre vecteurs colonnes. Noyau et image d'une matrice sont définis comme ceux de l'application linéaire canoniquement associée. Propriétés. Matrices de passage et changements de base. Relation de similitude et application aux calculs de puissance.

### *Questions de cours / Exercice typique.*

❶ Définition d'une matrice de passage. Énoncer la formule de changement de base pour les applications linéaires.

❷ Définition d'une matrice de passage. Énoncer la formule de changement de base pour les vecteurs. Application au repère canonique tourné d'un angle $\theta$ dans $\mathbf{R}^2$.

## 2 [Maths] Fonctions d'une variable réelle.

*Révisions de première année : quelques notions ont été revues en cours. Ne pas hésiter dans ce chapitre à disperser des questions d'informatique dans les exercices (tracés de courbes, algorithme de dichotomie pour la recherche de zéros d'équations et l'adaptation à la recherche de points fixes), classiques des planches Agro-Véto.*

— Généralités sur les fonctions : graphe, parité, périodicité, structures d'espace vectoriel et autres opérations *etc.*

— Limite en un point adhérent de l'ensemble de définition : définition « avec des $\varepsilon$ », limite à droite/gauche, caractérisation séquentielle, propriétés de la limite.

— Continuité : définition, version séquentielle, prolongements, théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, théorème des bornes atteintes (fonction continue sur un segment). Reformulations sur les images directes d'intervalles/segments par des fonctions continues.

— Dérivation : définition, propriétés, dérivée à droite/gauche, *extrema* et point critique intérieur au domaine de définition. Rolle, accroissements finis. Complément : fonctions lipschitziennes et dérivabilité des fonctions à valeurs complexes.

### *Questions de cours / Exercice typique.*

❶ Citer le théorème de dérivation d'une bijection réciproque. Existence de la fonction $\operatorname{Arctan}$, formule de $\operatorname{Arctan}'$, et graphe.

❷ Définition de la partie entière. Graphe de la fonction partie entière. Étude de la continuité de $x \longmapsto \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$ et $x \longmapsto \lfloor x \rfloor \sin(x)$.

❸ Fonction résolvant de manière approchée l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie où $f$ est une fonction continue.

❹ Énoncer le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis. Application à l'estimation : $\forall x > 0, \quad \dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

## 3 [Info] Introduction à la complexité/récursivité algorithmique. Tris.

— **Récursivité.** Présentation de la structure d'une fonction récursive, exemples classiques (suites récurrentes, factorielle d'un entier). [1]

— **Tris** Fonction qui détermine si une liste est triée en ordre croissant. Reprise du tri par insertion, tri bulles, tri par sélection (du minimum) vus en première année. Tri rapide, version récursive.

— **Complexité** Définitions et mesures à l'aide du module `time`.

***Scripts de cours.***

❶ Fonction qui détermine si une liste est triée par ordre croissant ou non.

❷ Fonction qui trouve le minimum d'une liste et renvoie le premier indice d'apparition, puis une seconde fonction pour le tri par sélection du minimum.

*Au programme de la semaine suivante : on ajoute les équations différentielles. Dans les semaines suivantes nous passerons aux probabilités discrètes, avec un chapitre préliminaire sur les suites et séries numériques.*

[1] Aucune dextérité en récursivité n'est attendue en BCPST.

# SEMAINE 4

# du 30 au 04/10/2019

**Attention** Je souhaiterais que chaque étudiant ait au moins un calcul de valeur propre en début de colle, en utilisant l'algorithme du pivot. Aucun autre élément sur la diagonalisation n'est attendu pour le moment : seulement le calcul des valeurs propres.

## 1 [Maths] Espaces Vectoriels

*Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $E = \mathbf{K}^n$, elles sont généralisées ici. Indulgence pour le moment sur les points d'analyse éventuellement mis en jeu dans les exercices, aucune révision n'a été faite pour le moment.*

*Rappel : la notion de somme directe et les notions associées (projecteurs, symétries etc.) ne sont pas au programme de BCPST.*

- **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.

- **Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases.** Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices. Algorithme de la base incomplète et conséquences : théorème de la base extraite/incomplète.

- **Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.** Comparaison entre le nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice (résultat que nous avons admis). Définition de la dimension, toutes les bases ont même cardinal. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de $\dim E$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie $E$. Dimension d'un produit cartésien. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré (nous n'avons pas encore revu qu'il s'agit du rang de la matrice associée dans une certaine base).

- **Applications Linéaires.** Notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Cas des formes linéaires, endomorphisme identique et homothéties. Détermination des applications $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$-linéaires de $\mathbf{C}$, et des applications $\mathbf{K}$-linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^r$. Exemples faisant intervenir des polynômes, fonctions, suites. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$ ; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$ ; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau. Isomorphismes, automorphismes (notation $\mathscr{GL}(E)$ pour l'ensemble des automorphismes sur $E$, un espace vectoriel), l'inverse d'une bijection linéaire est linéaire, inverse d'une composée. Équations linéaires du type $f(x) = y_0$ avec $(x, y_0) \in E \times F$ où $E, F$ sont deux espaces vectoriels et $f$ une application linéaire $E \to F$ et structure de l'ensemble des solutions[2]. Image de familles de vecteurs, caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire en fonction de l'image d'une base de l'espace de départ. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ. Rang et théorème du rang, propriétés du rang. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension. Équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité pour des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension. Application à l'existence d'un polynôme interpolateur, exemple sur des polynômes.

[2] Non présenté en cours

*Questions de cours / Exercice typique.*

❶ Énoncer le théorème du rang. Exemple du cours : justifier l'existence d'un unique polynôme interpolateur de degré $n$ pour un nuage de $n+1$ points.

## 2 [Maths] Calcul Matriciel. Représentation matricielle des objets linéaires.

— **Calcul Matriciel.** Définition d'une matrice, opérations, structure d'espace vectoriel. Base canonique et matrices élémentaires. Transposition, propriétés. Inversion, propriétés. Cas particulier des matrices de dimension deux, déterminant en dimension deux. Algorithme d'échelonnement (et réduit éventuellement) en ligne. Présentation de l'algorithme pour le calcul de l'inverse (méthode du miroir). Définition d'une valeur propre en terme de non inversibilité/rang. Calculs pratiques de valeurs propres. Matrices remarquables.

— **Représentation matricielle des objets linéaires.** Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs. Matrice d'une application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice, comme une application entre vecteurs colonnes. Noyau et image d'une matrice sont définis comme ceux de l'application linéaire canoniquement associée. Propriétés. Matrices de passage et changements de base. Relation de similitude et application aux calculs de puissance.

*Questions de cours / Exercice typique.*

❶ Définition d'une matrice de passage. Énoncer la formule de changement de base pour les applications linéaires.

❷ Définition d'une matrice de passage. Énoncer la formule de changement de base pour les vecteurs. Application au repère canonique tourné d'un angle $\theta$ dans $\mathbf{R}^2$.

## 3 [Info] Révisions de première année & Compléments

— **Rappels généraux.** Reprise des principaux types et notamment les listes.

— **Syntaxe d'une fonction.** Quelques scripts classiques

— **Tests logiques et boucles.** Syntaxe et nombreux exemples.

*Scripts de cours.*

❶ Fonction qui crée la somme des éléments d'une liste. Fonction qui détermine si un élément est présent dans une liste sans utiliser `in`.

❷ Fonction qui calcule le maximum d'une liste, et qui renvoie la liste des positions où il est présent.

## 4 [Info] Introduction à la complexité/récursivité algorithmique. Tris.

— **Récursivité.** Présentation de la structure d'une fonction récursive, exemples classiques (suites récurrentes, factorielle d'un entier). [3]

— **Tris** Fonction qui détermine si une liste est triée en ordre croissant. Reprise du tri par insertion, tri bulles, tri par sélection (du minimum) vus en première année.

*Scripts de cours.*

❶ Fonction qui crée la somme des éléments d'une liste. Fonction qui détermine si un élément est présent dans une liste sans utiliser `in`.

❷ Fonction qui détermine si une liste est triée par ordre croissant ou non.

❸ Fonction qui trouve le minimum d'une liste et renvoie le premier indice d'apparition, puis une seconde fonction pour le tri par sélection du minimum.

*Au programme de la semaine suivante : on ajoute des révisions d'Analyse.*

[3] Aucune dextérité en récursivité n'est attendue en BCPST.

# SEMAINE 3

## du 23 au 27/09/2019

**Attention** Je souhaiterais que chaque étudiant ait au moins un calcul de valeur propre en début de colle, en utilisant l'algorithme du pivot. Aucun autre élément sur la diagonalisation n'est attendu pour le moment : seulement le calcul des valeurs propres.
Ensuite on reviendra sur le chapitre d'espaces vectoriels qui nécessite encore d'être retravaillé.

### 1 [Maths] Espaces Vectoriels

*Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $E = \mathbf{K}^n$, elles sont généralisées ici. Indulgence pour le moment sur les points d'analyse éventuellement mis en jeu dans les exercices, aucune révision n'a été faite pour le moment.*

*Rappel : la notion de somme directe et les notions associées (projecteurs, symétries etc.) ne sont pas au programme de BCPST. La représentation matricielle des applications linéaires sera au prochain programme.*

— **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.

— **Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases.** Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices. Algorithme de la base incomplète et conséquences : théorème de la base extraite/incomplète.

— **Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.** Comparaison entre le nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice (résultat que nous avons admis). Définition de la dimension, toutes les bases ont même cardinal. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de $\dim E$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie $E$. Dimension d'un produit cartésien. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré (nous n'avons pas encore revu qu'il s'agit du rang de la matrice associée dans une certaine base).

— **Applications Linéaires.** Notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Cas des formes linéaires, endomorphisme identique et homothéties. Détermination des applications $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$-linéaires de $\mathbf{C}$, et des applications $\mathbf{K}$-linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^r$. Exemples faisant intervenir des polynômes, fonctions, suites. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$ ; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$ ; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau. Isomorphismes, automorphismes (notation $\mathscr{GL}(E)$ pour l'ensemble des automorphismes sur $E$, un espace vectoriel), l'inverse d'une bijection linéaire est linéaire, inverse d'une composée. Équations linéaires du type $f(x) = y_0$ avec $(x, y_0) \in E \times F$ où $E, F$ sont deux espaces vectoriels et $f$ une application linéaire $E \to F$ et structure de l'ensemble des solutions[2]. Image de familles de vecteurs, caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire en fonction de l'image d'une base de l'espace de départ. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ. Rang et théorème du rang, propriétés du rang. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension. Équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité pour des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension. Application à l'existence d'un polynôme interpolateur, exemple sur des polynômes.

[2] Non présenté en cours

### *Questions de cours / Exercice typique.*

❶ Définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Exemple (au choix du colleur) de réécriture d'un espace vectoriel donné sous forme d'équations réduites à l'aide d'un Vect.

❷ Soient $V$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $W$ un sous-espace vectoriel de $F$, ainsi que $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Écriture **précise** de $u(V)$ et $u^{-1}(W)$. Preuve du fait que $u(V)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

❸ Énoncer le théorème du rang. Exemple du cours : justifier l'existence d'un unique polynôme interpolateur de degré $n$ pour un nuage de $n+1$ points.

## 2 [Maths] Calcul Matriciel. Représentation matricielle des objets linéaires.

— **Calcul Matriciel.** Définition d'une matrice, opérations, structure d'espace vectoriel. Base canonique et matrices élémentaires. Transposition, propriétés. Inversion, propriétés. Cas particulier des matrices de dimension deux, déterminant en dimension deux. Algorithme d'échelonnement (et réduit éventuellement) en ligne. Présentation de l'algorithme pour le calcul de l'inverse (méthode du miroir). Définition d'une valeur propre en terme de non inversibilité/rang. Calculs pratiques de valeurs propres.

## 3 [Info] Révisions de première année & Compléments

— **Rappels généraux.** Reprise des principaux types et notamment les listes.

— **Syntaxe d'une fonction.** Quelques scripts classiques

— **Tests logiques et boucles.** Syntaxe et nombreux exemples.

### *Scripts de cours.*

❶ Fonction qui crée la somme des éléments d'une liste. Fonction qui détermine si un élément est présent dans une liste sans utiliser `in`.

❷ Fonction qui calcule le maximum d'une liste, et qui renvoie la liste des positions où il est présent.

*Au programme de la semaine suivante : toutes les matrices en Maths, les tris en Info.*

# SEMAINE 2

# du 16 au 20/09/2019

## 1 [Maths] Espaces Vectoriels

*Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $E = \mathbf{K}^n$, elles sont généralisées ici. Indulgence pour le moment sur les points d'analyse éventuellement mis en jeu dans les exercices, aucune révision n'a été faite pour le moment.*

*Rappel : la notion de somme directe et les notions associées (projecteurs, symétries etc.) ne sont pas au programme de BCPST. La représentation matricielle des applications linéaires sera au prochain programme.*

— **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.

— **Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases.** Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices. Algorithme de la base incomplète et conséquences : théorème de la base extraite/incomplète.

— **Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.** Comparaison entre le nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice (résultat que nous avons admis). Définition de la dimension, toutes les bases ont même cardinal. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de $\dim E$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie $E$. Dimension d'un produit cartésien. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré (nous n'avons pas encore revu qu'il s'agit du rang de la matrice associée dans une certaine base).

— **Applications Linéaires.** Notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Cas des formes linéaires, endomorphisme identique et homothéties. Détermination des applications $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$-linéaires de $\mathbf{C}$, et des applications $\mathbf{K}$-linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^r$. Exemples faisant intervenir des polynômes, fonctions, suites. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$ ; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau.

*Ne pas hésiter à proposer en plus large quantité des exercices spécifiques au programme de 2ème année, notamment les espaces vectoriels de fonctions, de suites, de polynômes.*

### *Questions de cours / Exercice typique.*

❶ Définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Exemple (au choix du colleur) de réécriture d'un espace vectoriel donné sous forme d'équations réduites à l'aide d'un Vect.

❷ Définition d'une famille génératrice finie. Preuve du fait que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

❸ Soient $V$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $W$ un sous-espace vectoriel de $F$, ainsi que $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Écriture **précise** de $u(V)$ et $u^{-1}(W)$. Preuve du fait que $u(V)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

## 2 [Info] Révisions de première année & Compléments

— **Rappels généraux.** Reprise des principaux types et notamment les listes.

— **Syntaxe d'une fonction.** Quelques scripts classiques

— **Tests logiques et boucles.**

### *Scripts de cours.*

❶ >_ Fonction qui crée la somme des éléments d'une liste. Fonction qui détermine si un élément est présent dans une liste sans utiliser **in**.

❷ >_ Fonction qui calcule le maximum d'une liste, et qui renvoie la liste des positions où il est présent.

*Au programme de la semaine suivante : le calcul matriciel (révisions) et la représentation matricielle des applications linéaires.*

# SEMAINE 1

# du 09 au 13/09/2019

## 1 [Maths] Espaces Vectoriels

*Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $E = \mathbf{K}^n$, elles sont généralisées ici. Indulgence pour le moment sur les points d'analyse éventuellement mis en jeu dans les exercices, aucune révision n'a été faite pour le moment.*

— **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.

— **Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases.** Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques.

*Ne pas hésiter à proposer en plus large quantité des exercices spécifiques au programme de 2ème année, notamment les espaces vectoriels de fonctions, de suites, de polynômes.*

***Questions de cours / Exercice typique.***

❶ Définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Preuve du fait que $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

❷ Définition d'une famille libre. Preuve du fait que toute famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.

❸ Définition d'une famille génératrice finie. Preuve du fait que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

## 2 [Info] ...

*Rien pour le moment, tous les étudiants n'ont pas fait le premier TP.*