DEVOIR SURVEILLÉ # 7
le Samedi 01/02/2020, 8h $\longrightarrow$ 10h30

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
L'usage de la calculatrice est interdit.

La dernière partie du problème n'est à traiter que si tout le reste a été abordé : un faible barème sera mis sur cette partie.

Exercice 1 ***Agro—Véto, 2016, Étude des lois à densité à absence de mémoire*** On s'intéresse à la dissolution d'une pastille de chlore. On note T la variable aléatoire correspondant au temps qu'elle met pour se dissoudre. On suppose qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout réel $t \in [0, +\infty[$:

$$\frac{\mathbf{P}(t < T < t+h | T > t)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \lambda$$

1 — Soit Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1[$; soit $X = \dfrac{-\ln(1-Y)}{\lambda}$.

1.1. Déterminer la fonction de répartition de X.

1.2. Quelle est la loi de X ? Reconnaître cette loi en et précisant le paramètre.

1.3. Simuler la loi de X avec un programme Python.

2 — On note F la fonction de répartition de T.

2.1. On admet que $\mathbf{P}(T > 0) = 1$; que vaut F sur $]-\infty, 0]$? Montrer que :

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \lambda(1 - F(t)).$$

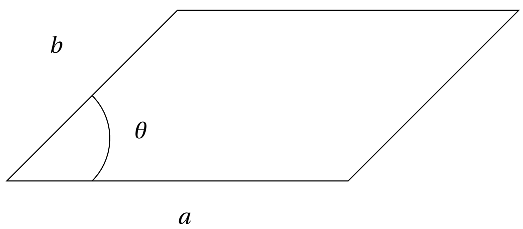
En déduire que F est dérivable sur $[0, +\infty[$

2.2. Montrer que F est solution de l'équation différentielle sur $[0, +\infty[$: $y' + \lambda y = \lambda$.

2.3. Déterminer F.

2.4. En déduire la loi de T, son espérance et sa variance.

Problème 1 On considère un réseau dont la maille élémentaire est un parallélogramme, structure présente notamment en cristallographie. Cette maille élémentaire a alors pour aire $ab\sin\theta$.
On suppose que l'angle θ est la réalisation d'une variable aléatoire Θ suivant une uniforme sur $[0, \pi/2]$. l'étude de la variable aléatoire Θ nécessite certaines connaissances sur une fonction intermédiaire A qui seront établies dans la première partie. La densité obtenue dans la seconde dont nous étudierons quelques propriétés apparait en pratique dans d'autres contexte sous une forme proche dans la loi dite de l'arcsinus. Les deux dernières parties étudient des fonctions polynomiales définies à l'aide de la fonction A.



Partie I— Définition et propriétés de la fonction A.

1 — Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$. On notera dans la suite A la fonction réciproque de $\left|\begin{array}{ccc}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1]\\ x & \longmapsto & \sin x\end{array}\right.$, on l'appelle aussi *fonction Arcsin* (lire « arcsinus »).

2 — Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.

3 — Tracer le graphe de la fonction A.

4 — Soit $x \in [-1,1]$, montrer que : $\cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

5 — Montrer que A est dérivable sur $]-1,1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus apparaître de fonction de trigonométrique.

6 — 6.1. Déterminer le développement limite à l'ordre un au voisinage de zéro de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

6.2. En déduire, en primitivant une fonction bien choisie, que A admet un développement limité à l'ordre trois en zéro donné par : $A(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

On pourra dans la suite utiliser les résultats de la partie précédente même s'ils n'ont pas été établis.

Partie II— Étude d'une variable aléatoire.

On considère une variable aléatoire Θ de loi uniforme sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et on s'intéresse à $X = \sin(\theta)$.

7 — Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

8 — En déduire que X est une variable aléatoire réelle à densité dont une densité est donnée par :

$$f_X : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9 — 9.1. Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.

9.2. Quelle est la signification de ce résultat par rapport au contexte proposé dans le préambule du problème ?

9.3. Montrer que X^2 possède une espérance et donner sa valeur. *Indication : On pourra utiliser, avec justification, le changement de variable « $x = \sin(t)$ ».*

10 — On s'intéresse, dans cette question, au comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires de même loi que X. Pour cela, on considère $n \in \mathbf{N}^\star$, et $(X_1,\dots,X_n)$ une famille de n variables aléatoires de même loi que X et indépendantes. On introduit la *moyenne empirique* $\overline{X_n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

10.1. Calculer espérance et variance de $\overline{X_n}$.

10.2. Énoncer, de manière générale, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

10.3. En déduire, en fonction de n et de la variance de X, un intervalle $[a_n,b_n]$ tel que :

$$\mathbf{P}\left(\overline{X_n} \in [a_n,b_n]\right) \geqslant 95\%.$$

11 — On s'intéresse dans cette question à des évènements « rares » associés à la variable aléatoire X.

11.1. Justifier que $\mathbf{P}\left(X \leqslant \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{\pi}A\left(\frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

11.2. À l'aide de la question 6 de la première partie, prouver l'existence de constantes $A,B \in \mathbf{R}$ telles que :

$$\mathbf{P}\left(X \leqslant \frac{1}{n}\right) - \frac{A}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{B}{n^3}.$$

11.3. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $p_n = \mathbf{P}\left(X \geqslant 1 - \frac{1}{n}\right)$.

- **11.3.1.** Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$. *Indication : On pourra faire intervenir F_X.*
- **11.3.2.** Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a : $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = 1 - \frac{1}{n}$.
- **11.3.3.** Rappeler le développement limité en zéro de cos.
- **11.3.4.** En déduire l'existence d'une constante $c \in \mathbf{R}$ telle que : $p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{n}}$.

Partie III— Étude d'une suite de fonctions définies à l'aide de la fonction $A =$ Arcsin.

Pour tout n, on pose $f_n : x \in \mathbf{R} \longmapsto \cos(2nA(x))$.

12 — Calculer f_0, f_1, f_2 sous forme de polynômes. <u>*Indication :*</u> *On pourra utiliser des formules de trigonométrie, en exprimant* $\cos(2x)$ *en fonction de* $\sin(x)$ *pour tout* $x \in \boldsymbol{R}$.

13 — **13.1.** Soient $a,b \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(a+b)+\cos(a-b)$ en fonction de $\cos a$ et $\cos b$.

13.2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_{n+2}(x)+f_n(x) = 2(1-2x^2)f_{n+1}(x).$$

14 — Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, il existe un polynôme de degré $2n$ tel que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f_n(x) = P_n(x).$$

15 — Soit $n \in \mathbf{N}$. En calculant f_n' et f_n'', montrer que f_n est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(x^2-1)y''+xy'-4n^2y=0$.

Correction

Solution (Exercice 1)

1 — 1.1. Puisque $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1[)$, la variable X est presque-sûrement à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ puisque $\lambda > 0$. Donc

$$\mathbf{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{P}(\ln(1-Y) \geqslant -\lambda x) = \mathbf{P}(Y \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La dernière étape est obtenue en se souvenant que la fonction de répartition de $\mathscr{U}([0,1[)$ vaut l'identité sur $[0,1[$. En conclusion

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

1.2. On reconnaît la fonction de répartition de $\mathscr{E}(\lambda)$. Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)}$.

1.3.
```python
import numpy as np
import random as rd
def Simux(lamba):
    return -np.log(rd.random())/lamba
```
Une simulation donne : 0.743116259983754.

2 — 2.1. Nous avons par hypothèse $1 - \mathbf{P}(T \leqslant 0) = 1$ donc $\mathbf{P}(T \leqslant 0) = 0 = F(0)$. Donc $\boxed{F\big|_{]-\infty;0]} = 0}$, puisque F est une fonction positive croissante.

2.2. Commençons par reformuler l'hypothèse. Elle signifie que, pour $t \in [0;+\infty[$:

$$\frac{\mathbf{P}\left(\{t < T < t+h\} \cap \{T > t\}\right)}{h\mathbf{P}(T > t)} = \frac{\mathbf{P}\left(t < T < t+h\right)}{h\mathbf{P}(T > t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{h(1 - F(t))} \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} \lambda.$$

Comme $1 - F(t)$ ne dépend pas de h, cette limite s'écrit aussi :

$$\boxed{\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} (1 - F(t))\lambda.}$$

C'est exactement la définition de la dérivabilité de F en $t \in [0;+\infty[$, ceci étant vrai pour tout t, nous avons : $\boxed{F \text{ dérivable sur } [0;+\infty[.}$

2.3. La question précédente donne en plus que F vérifie :

$$\boxed{F'(t) = \lambda(1 - F(t)), \quad \forall t \in [0;+\infty[}.$$

2.4. On résout immédiatement l'équation différentielle : d'une part, d'après la formule du cours, l'ensemble des solutions homogènes est

$$\left\{t \in [0;+\infty[\longrightarrow C\mathrm{e}^{-\lambda t}, C \in \mathbf{R}\right\}.$$

Comme le second membre est constant, on peut gagner du temps chercher une solution particulière sous forme d'une constante. En conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{t \in [0;+\infty[\longrightarrow C\mathrm{e}^{-\lambda t} + 1, C \in \mathbf{R}\right\}.}$$

Mais comme $F(0) = 0$, il vient comme condition $C + 1 = 0$ donc $C = -1$, et finalement :

$$\boxed{F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

2.5. Puisque la fonction de répartition détermine la loi, on déduit que $\boxed{T \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)}$ d'après la partie précédente, et d'après le cours : $\boxed{\mathbf{E}(T) = \frac{1}{\lambda}, \mathbf{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}.}$

Solution (Problème 1)

Partie I — Définition et propriétés de la fonction A.

1 — La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

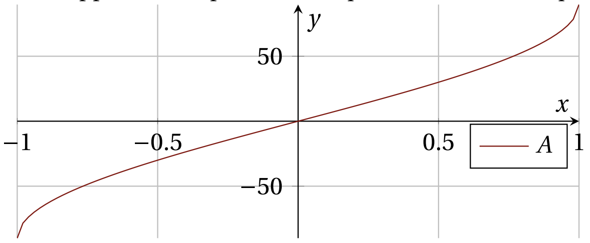
De plus $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, donc : $\boxed{\text{sinus réalise une bijection de } \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \text{ sur } [-1,1].}$

La réciproque de cette fonction sera notée A.

2 — On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\boxed{A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}.}$

De-même, puisque $\sin(-\pi/4)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, on déduit que $\boxed{A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}.}$

3 — On trace tout d'abord $\mathscr{C}_1$, la courbe de sin sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, puis on sait que la courbe de A est le symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à la première bissectrice, c'est à dire par rapport à la droite D d'équation $y=x$.
On fait apparaitre les points remarquables vus dans les questions 1 et 2.



4 — Soit x dans $[-1,1]$. On sait que : $\cos^2(A(x))+\sin^2(A(x))=1$. Et par définition $\sin(A(x))=x$. Donc $\cos^2(A(x))=1-x^2$.
Ainsi $\left|\cos(A(x))\right|=\sqrt{1-x^2}$. Enfin, $A(x)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel le cosinus est positif. Donc :

$$\boxed{\forall x\in[-1,1],\quad \cos(A(x))=\sqrt{1-x^2}.}$$

5 — La fonction $f=\sin$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x)=\cos(x)$, donc f' ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi

$\boxed{A=f^{-1} \text{ est dérivable sur } f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=]-1,1[.}$ Toujours d'après le cours d'analyse, $A'=\frac{1}{f'\circ A}$, donc :

$\boxed{\forall t\in]-1,1[,\quad A'(t)=\frac{1}{\cos(A(t))}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.}$ La dernière égalité est obtenue grâce à la question 4.

6 — 6.1. D'après le cours sur les développements limités, pour $a\in\mathbf{R}$, on a au voisinage de 0 : $(1+x)^a\underset{x\to0}{=}1+ax+o(x)$. En l'appliquant avec $a=-\frac{1}{2}$: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}}\underset{x\to0}{=}1-\frac{x}{2}+o(x).}$

6.2. Et ainsi, lorsque $x\to0$: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\underset{x\to0}{=}1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$.

On peut primitiver le développement limité : $A(x)\underset{x\to0}{=}A(0)+x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$.

Or $A(0)=0$, car $\sin(0)=0$ et $0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, donc : $\boxed{\text{Au voisinage de } 0 : \quad A(x)\underset{x\to0}{=}x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).}$

Partie II— Étude d'une variable aléatoire.

7 — Déjà $X(\Omega)=[0,1]$. Soit $x\in[0,1]$.

$$\begin{aligned}F_X(x)&=\mathbf{P}(X\leq x)=\mathbf{P}(\sin(\Theta)\leq x)\\&=\mathbf{P}(\Theta\leq A(x))\quad\text{car sin strictement croissante sur }\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\&=\frac{2}{\pi}A(x).\end{aligned}$$

En résumé : $\boxed{F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0,\\ \frac{2}{\pi}A(x) & \text{si } x\in[0,1],\\ 1 & \text{si } x>1.\end{cases}}$

8 — La fonction F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$.
F_X est continue en 0 car : $\lim\limits_{x\to0^+}F_X(x)=\frac{2}{\pi}A(0)=0$, $F_X(0)=0$, et $\lim\limits_{x\to0^-}F_X(x)=0$.

F_X est continue en 1 car : $\lim_{x\to 1-} F_X(x) = \dfrac{2}{\pi}A(1) = 1$, $F_X(1) = 1$, et $\lim_{x\to 1+} F_X(x) = 1$.
Ainsi F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points, donc :

$\boxed{X \text{ est une variable à densité.}}$

$$\boxed{\text{Une densité de } X \text{ est : } f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}A'(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

9 — 9.1. Sous réserve de convergence absolue, avec le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\big(\sin(\Theta)\big) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) f_\Theta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale est évidemment absolument convergente puisque sinus est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance et } \mathbf{E}(X) = \frac{2}{\pi}[-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.}$$

9.2. Interprétation : en réalisant un réseau comme indiqué dans le préambule, avec a et b fixés et en prenant l'angle θ aléatoirement et de façon uniforme dans $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors l'aire de la maille élémentaire obtenue sera une variable aléatoire ayant une espérance, et l'espérance de cette aire (c'est à dire concrètement sa valeur moyenne) sera égale à $\dfrac{2ab}{\pi}$.

9.3. Sous réserve de convergence absolue, avec le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{E}\big(\sin^2(\Theta)\big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale converge absolument puisque $\sin^2$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, donc : $\boxed{X^2 \text{ possède une espérance.}}$

Pour primitiver $\sin^2$ un peu de trigonométrie est nécessaire : $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

Ainsi : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[t - \frac{\sin(2t)}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$. En conclusion : $\boxed{\mathbf{E}\left(X^2\right) = \dfrac{1}{2}.}$

10 — 10.1. Par linéarité de l'espérance : $\boxed{\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) = \mathbf{E}(X) = \frac{2}{\pi}.}$ Pour la variance : $\mathbf{Var}\left(\overline{X_n}\right) = \dfrac{1}{n^2}\mathbf{Var}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\right)$.

Puis, par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$:

$$\mathbf{Var}\left(\overline{X_n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbf{Var}(X_i) = \frac{1}{n}\mathbf{Var}(X).$$

Et, par la formule de Koenig-Huygens : $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbf{E}(X)\right)^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}$. Ainsi : $\boxed{\mathbf{Var}\left(\overline{X_n}\right) = \dfrac{\pi^2-8}{2\pi^2 n}.}$

10.2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dit que : si Y est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux, alors : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|Y - E(Y)| \le \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{\mathbf{Var}(Y)}{\varepsilon^2}.}$ Nous donnons la version avec la fonction d'anti-répartition, utile pour la suite.

10.3. Puisque $\overline{X_n}$ admet une variance, on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbf{P}\left(\overline{X_n} \in [\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) - \varepsilon, \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) + \varepsilon]\right) \ge 1 - \frac{\mathbf{Var}\left(\overline{X_n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

On choisit alors ε tel que $\dfrac{\mathbf{Var}\left(\overline{X_n}\right)}{\varepsilon^2} = \dfrac{5}{100}$. On prend $\varepsilon = \sqrt{20\mathbf{Var}\left(\overline{X_n}\right)}$. Finalement :

$$\boxed{\text{On pose } a_n = \mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) - \sqrt{20\mathbf{Var}\left(\overline{X_n}\right)} = \mathbf{E}(X) - \sqrt{\frac{20\mathbf{Var}(X)}{n}} \text{ et } b_n = \mathbf{E}(X) + \sqrt{\frac{20\mathbf{Var}(X)}{n}}.}$$

11 — 11.1. On sait par définition de la fonction de répartition que : $\mathbf{P}\left(X \le \dfrac{1}{n}\right) = F_X\left(\dfrac{1}{n}\right) = \boxed{\dfrac{2}{\pi}A\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

11.2. D'après le développement limité établi précédemment, lorsque $x \to 0$, $A(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$.

Ceci peut être appliqué avec $x = \dfrac{1}{n}$ qui tend bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$: $A\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^3}$.

En multipliant par $\frac{2}{\pi}$ de chaque côté : $\boxed{\text{lorsque } n \to +\infty, \quad \mathbf{P}\left(X \leq \frac{1}{n}\right) - \frac{2}{\pi n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{3\pi n^3}.}$

11.3. **11.3.1.** Ici $p_n = \mathbf{P}\left(X \geq 1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - F_X\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Par continuité de la fonction F_X : $\boxed{\lim_{n\to\infty} p_n = 1 - F_X(1) = 0.}$

11.3.2. On a : $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}F_X(1-\frac{1}{n})\right) = \sin\left(A(1-\frac{1}{n})\right) = 1 - \frac{1}{n}$.

Donc on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = 1 - \frac{1}{n}.}$

11.3.3. $\boxed{\text{Au voisinage de } 0 : \quad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).}$

11.3.4. On sait que : $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$. Ainsi l'égalité devient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}p_n\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, $p_n \to 0$, donc on peut utiliser le développement limité de cos :

$$1 - \frac{\pi^2}{8}p_n^2 + o\left(p_n^2\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{n}.$$

Et ainsi : $\frac{\pi^2}{8}p_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et puisque $p_n \geq 0$ on conclut que :

$$\boxed{p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{n}} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.}$$

Partie III— Étude d'une suite de fonctions définies à l'aide de A = Arcsin.

On pose $f_n : x \mapsto \cos\left(2nA(x)\right)$. Rappelons que

$$\cos\left(A(x)\right) = \sqrt{1-x^2}.$$

12 — $\boxed{f_0(x) = \cos(0) = 1 = P_0(x) \text{ avec } P_0(X) = 1.}$ $f_1(x) = \cos\left(2A(x)\right) = 2\cos^2\left(A(x)\right) - 1 = 2(1-x^2) - 1$. Ainsi : $f_1(x) = 1 - 2x^2 = P_1(x)$ avec $P_1(X) = 1 - 2X^2$.
$f_2(x) = \cos\left(4A(x)\right) = 2\cos^2\left(2A(x)\right) - 1 = 2\left(f_1(x)\right)^2 - 1 = 2(1-2x^2)^2 - 1$.
Ainsi : $\boxed{f_2(x) = 1 - 8x^2 + 8x^4 = P_2(x) \text{ avec } P_2(X) = 1 - 8X^2 + 8X^4.}$

13 —13.1. En sommant les deux formules de trigonométrie associées, on trouve $\boxed{\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).}$

13.2. Soient n dans $\mathbf{N}$ et x dans $[-1,1]$.

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) + f_n(x) &= \cos\left(2(n+1)A(x) + 2A(x)\right) + \cos\left(2(n+1)A(x) - 2A(x)\right) \\ &= 2\cos\left(2A(x)\right)\cos\left(2(n+1)A(x)\right) \end{aligned}$$

grâce à la formule de trigonométrie obtenue en précédemment.

Puisque $\cos(2A(x)) = f_1(x) = 1 - 2x^2$, on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in [-1,1], \quad f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2)f_{n+1}(x).}$

14 — Pour $n \in \mathbf{N}$, posons : $(\mathscr{P}_n)$ il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}_{2n}[X]$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$, $f_n(x) = P_n(x)$. Prouvons la propriété $\mathscr{P}(n)$ par récurrence double.

Initialisation. On a déjà vu que pour tout $x \in [-1,1]$, $f_0(x) = 1$ et $f_1(x) = 1-2x^2$. Puisque $\deg(1) = 0$ et $\deg(1-2X^2) = 2$, $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.

Hérédité. Fixons $n \in \mathbf{N}$ et supposons $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ vraies. Alors comme

$$f_{n+2}(x) = 2(1-2x^2)P_{n+1}(x) - P_n(x).$$

Puisqu'un produit et une somme de polynômes est encore un polynôme, il existe bien un polynôme P_{n+2} tel que pour tout x de $[-1,1]$, $f_{n+2}(x) = P_{n+2}(x)$.
Quant au degré, on a par hypothèse de récurrence : d'une part $\deg(P_n) = 2n$ et d'autre part, $\deg\left(2(1-2X^2)P_{n+1}(X)\right) = 2 + \deg(P_{n+1}) = 2n+4$.
Puisque ces deux degrés sont différents, le degré de f_{n+2} vaut le maximum, c'est à dire $2(n+2)$. Ainsi $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie. Donc $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par principe de récurrence.

15 — Puisque A est dérivable sur $]-1,1[$, f_n est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f_n'(x) = -2nA'(x)\sin\big(2nA(x)\big) = \dfrac{-2n}{\sqrt{1-x^2}}\sin\big(2nA(x)\big)$.

On voit que f_n' est à son tour dérivable sur $]-1,1[$ comme produit de telles fonctions, et pour tout x de $]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= -2n\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\big(2nA(x)\big) - \frac{2n}{\sqrt{1-x^2}}\big(2nA'(x)\big)\cos\big(2nA(x)\big) \\ &= -2n\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\big(2nA(x)\big) - \frac{4n^2}{1-x^2}f_n(x). \end{aligned}$$

Pour tout x de $]-1,1[$ on calcule :

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^2-1)f_n''(x) + xf_n'(x) - 4n^2f_n(x) \\ &= \left(2n\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin\big(2nA(x)\big) + 4n^2f_n(x)\right) - \frac{2nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin\big(2nA(x)\big) - 4n^2f_n(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et ainsi $\boxed{f_n \text{ est solution sur }]-1,1[\text{ de l'équation différentielle : } (x^2-1)y'' + xy' - 4n^2y = 0.}$