

Rapport Méthodes de calcul et raisonnement 2016

Exercice :

Cet exercice d'analyse proposait l'étude d'une série de Bertrand. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, on obtenait la nature de la série ainsi qu'un développement à deux termes de la somme partielle. Enfin, en admettant l'existence de la constante d'Euler, on obtenait la limite de la série alternée associée. Cet exercice présentait des questions classiques (étude de fonction, encadrement de suite, récurrence) mais aussi des questions techniques. Les candidats ont visiblement été déstabilisés mais cela ne justifie néanmoins pas l'absence de rigueur et les énormes erreurs rencontrées.

1. (a) Question globalement bien traitée. La limite en zéro est quand même souvent justifiée par une croissance comparée.
- (b) Cette question a visiblement dérouté les candidats même si l'on a vu des démonstrations graphiques intéressantes.
- (c) Les candidats somment très fréquemment de 1 à n et très peu se rendent compte que cela pose un problème. La primitive a souvent été trouvée néanmoins le télescopage des termes conduit très rarement aux bonnes constantes. Il n'est pas rare de voir $\ln(0)$ et on constate une réelle absence d'esprit critique lorsque les constantes trouvées sont toutes nulles ou dépendent de n .
- (d) Question globalement bien traitée.
2. (a) Parmi ceux qui ne composent pas les équivalents par la fonction \ln , la difficulté pour étudier le quotient $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = \frac{\ln^2\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln^2(n)}$ a étonnamment résidé dans l'utilisation des propriétés classiques du logarithme et le développement d'un carré.
- (b) Les candidats confondent trop souvent équivalent et égalité et on obtient régulièrement des inégalités du type :

$$\frac{\ln^2(n)}{2} \leq S_n \leq \frac{\ln^2(n)}{2} \text{ ou } 1 \leq \frac{2S_n}{\ln^2(n)} \leq 1\dots$$
3. (a) Cette question a été rarement bien traitée. Une indication aurait pu leur permettre d'utiliser les encadrements trouvés précédemment.
- (b) Beaucoup de candidats ont évoqué le théorème de la limite monotone. La démonstration de la minoration a donné lieu à de nombreuses erreurs de raisonnement alors qu'elle découlait de la question 1.c et de la croissance du logarithme. On lit par exemple : "Comme $S_n \sim \frac{\ln^2(n)}{2}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Donc u est décroissante et minorée par 0. Ainsi u converge"

4. (a) Cette récurrence a été très rarement faite.
- (b) La manipulation du $o(1)$ a posé des difficultés mais cela ne justifie pas de trouver des limites dépendant de n .
- (c) Très peu de candidats ont utilisé la relation

$$A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}.$$

- (d) La conclusion est souvent juste même si le fait que (l'on admet que) les deux suites convergent vers la même limite n'est pas toujours cité.

Problème :

Il s'agissait ici de faire réfléchir les étudiants sur une notion nouvelle.

La première partie permettait la démonstration de résultats relativement simples. Les candidats avaient d'ailleurs une bonne idée des réponses mais on constate de graves lacunes de raisonnement et de rédaction. Étonnamment les questions classiques notamment celles portant sur la réduction n'ont pas été si bien traitées. La dernière partie plus théorique permettait d'obtenir une caractérisation des matrices pseudo-inversibles.

Partie I

1. (a) Il s'agissait d'une simple manipulation qui a souvent été bien faite.
- (b) Comme A est non nulle (ce qui n'était d'ailleurs pas spécifié par l'énoncé), beaucoup de candidats simplifient par A . Certains multiplient par A^{-1} sans se poser de questions.
2. (a) La conclusion est souvent obtenue mais le raisonnement et la rédaction sont bancals.
- (b) Même constat : la réponse est souvent pressentie, mais le raisonnement ne suit pas toujours.
- (c) i. Récurrence souvent bien faite.
- ii. Le raisonnement par l'absurde n'est pas acquis.
- iii. Un grand nombre remarque que $N^2 = 0$, mais n'en conclue rien.
3. (a) Question rarement réussie. On voit très souvent "toute matrice diagonale est inversible". Il est très déroutant de voir "si l'on pose que $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ alors $D^{-1} = \text{diag}(1/a_1, \dots, 1/a_n)$ " sans se poser la moindre question concernant l'annulation ou non des coefficients !

- (b) La pseudo-inverse est intuitée mais la justification est souvent hasardeuse. Il est très fréquent de voir les étudiants supposer le caractère pseudo-inversible pour aboutir finalement à ... la pseudo-inversibilité de la matrice.

Le raisonnement par analyse-synthèse n'est pas maîtrisé.

- (c) Il s'agissait simplement d'utiliser les deux questions précédentes. Cela permettait de discerner les candidats qui savaient raisonner.
- (d) Beaucoup de candidats se sont jetés sur cette question pour appliquer mécaniquement une diagonalisation qui n'a pas été aussi réussie qu'attendu. De nombreuses erreurs de vocabulaire (confusion entre rang, dimension et cardinal). On voit aussi trop fréquemment des erreurs du type $E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. (a) Question bien traitée lorsqu'elle a été abordée.
- (b) Les définitions du noyau et de l'image n'étant que partiellement connues, cette question n'a été que rarement réussie.
- (c) Question peu traitée. L'existence était délicate sans maîtriser le raisonnement par analyse-synthèse mais l'unicité était abordable.
5. (a) Le terme d'automorphisme est connu (même s'il n'apparaît plus dans le programme), c'est la démonstration de l'injectivité et l'utilisation de la dimension finie qui ont posé problème.
- (b) i. Le théorème du rang est très souvent cité.
- ii. L'argument "une famille libre de vecteur de \mathbb{R}^n de cardinal n est une base de \mathbb{R}^n " est bien assimilé, mais la démonstration de la liberté de la famille pose problème.
- iii. Question rarement traitée même si l'existence était accessible.
- (c) Question rarement traitée
- (d) Question rarement traitée
- (e) Question traitée (en admettant ce qui précédait) par les étudiants ayant compris le sujet.
6. Cette dernière question n'a quasiment pas été abordée.

Conclusion :

Cette épreuve a visiblement présenté de grosses difficultés aux candidats. Certaines questions étaient effectivement difficiles mais le jury s'inquiète que les questions plus faciles ou plus classiques n'aient pas été correctement traitées.

Des manipulations simples comme la sommation d'inégalités de la question 1.c de l'exercice se sont révélées difficiles par manque de rigueur, la réduction de la matrice A ou la question 1.c du problème ont montré que la connaissance des définitions est approximative. Plus inquiétant, les erreurs de raisonnement sont présentes dans la plupart des copies (les étudiants commencent par exemple par supposer ce qu'ils doivent prouver), les raisonnements par analyse-synthèse ou par l'absurde ne sont pas maîtrisés