

# Un sujet pour l'épreuve B (modélisation et informatique)

## Présentation

Le texte proposé ci-après est conçu pour l'épreuve B, portant plus particulièrement sur la modélisation et les aspects informatiques.

Il est formé d'un préambule présentant la situation physique étudiée et la modélisation envisagée puis de trois parties. La première partie (B) met en place les principaux concepts (modélisation dans l'espace des phases, solutions approchées explicites, implicites ou mixtes, suivi de l'évolution de l'énergie sur une solution approchée). Le but de cette partie est de valider la maîtrise des compétences générales liées à l'activité de modélisation ; la sous-partie B7 permet de vérifier, à partir d'un support graphique, si la compréhension des démarches antérieures est correcte.

La seconde partie (C) est davantage consacrée aux aspects informatiques et permet de valider les compétences associées. Comme l'informatique apparaît très tôt (B.4), on s'assure ainsi d'une bonne prise en compte de cette dimension de la formation.

La dernière partie (D) propose de revenir sur la situation initiale en la rendant un peu plus proche des réalités physiques (introduction d'un facteur d'amortissement), au prix d'un usage plus avancé de l'algèbre linéaire (valeurs propres et vecteurs propres). Cette partie est plutôt destinée à mettre en valeur les candidats les plus réactifs.

Les compétences mobilisées dans ce problème sont essentiellement les suivantes :

- ▷ Engager une recherche, définir une stratégie : questions B.2.3, B.4.4, B.5.4, C.4, D.3, D.6.
- ▷ Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique : questions B.1, D.3.
- ▷ Représenter, changer de registre : questions B.1.1, B.1.3, B.3.1, B.7.2, D.4.
- ▷ Traduire un algorithme dans un langage de programmation : questions B.4.3, B.4.4, B.5.4, C.2, C.3.
- ▷ Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes : questions B.2.3, D.1, D.2, D.5.
- ▷ Identifier un problème sous différents aspects : questions B.1.1, B.7.2.
- ▷ Critiquer ou valider un modèle ou un résultat : questions B.6.2, B.7.1, D.4, D.8.
- ▷ Communiquer à l'écrit et à l'oral : compétence présente, par nature, dans l'ensemble des questions.

On rappelle que l'emploi d'une calculatrice est autorisé dans cette épreuve (bien que cela ne serve guère dans le présent sujet).

# Énoncé

## A. Contexte et but de l'étude

L'objectif de ce sujet est de présenter, dans un cas très simple, plusieurs modèles numériques permettant d'approcher les solutions d'une équation différentielle et de comprendre pourquoi on peut préférer un modèle numérique à un autre.

On s'intéresse à un oscillateur harmonique (non amorti) régi par une équation différentielle :

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$x$  désignant une certaine grandeur physique (par exemple une longueur mesurée en mètres, mais ce pourrait être un angle ou une tension, etc.) et  $t$  le temps (mesuré en secondes). La « pulsation »  $\omega$  du mouvement est un réel strictement positif traduisant les caractéristiques du système oscillant (ce peut être la raideur d'un ressort, l'inductance d'un circuit, etc.). Le cas de l'oscillateur amorti sera abordé à la fin du sujet.

Pour étudier commodément cette équation différentielle, on introduit une seconde coordonnée :  $y = \frac{1}{\omega} \frac{dx}{dt}$  ( $y$  est proportionnelle à la vitesse). La division par  $\omega$  présente un intérêt pratique : si la grandeur  $x$  se mesure en mètres (par exemple),  $\omega$  se mesure en  $s^{-1}$ , si bien que  $y$  a la même unité de mesure que  $x$ . On peut traduire l'équation (1) sous la forme

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x \end{cases}$$

Le plan repéré par les coordonnées  $(x, y)$  s'appelle *l'espace des phases* associé à l'équation (1).

Une solution du système (E) est un couple de fonctions  $(x, y)$  définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$  et telles que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x(t) \end{cases}$$

Ce système intervient par exemple dans la linéarisation du pendule simple lorsque les oscillations sont « petites » et en possède de nombreuses caractéristiques. En particulier,  $x(t)$  représente l'angle du pendule à un instant  $t$  donné et  $y(t)$  une « vitesse angulaire normalisée » associée.

La propriété fondamentale qui nous intéresse ici est une propriété physique : la conservation de l'« énergie » du système. On étudiera cette énergie dans un premier temps ; on retiendra que la donnée de  $x(t)$  et de  $y(t)$  (position et vitesse) en un instant  $t$  fixe l'énergie du système à tout instant (cela provient du fait que le système est « autonome » et isolé).

On s'intéressera ensuite à trois méthodes numériques. L'idée, comme dans la méthode d'Euler pour les équations d'ordre 1, consiste à approcher les fonctions  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  en tout temps  $t_n = h \times n$  par des nombres  $x_n$  et  $y_n$ . En pratique,  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  sont calculés directement à partir de  $x_n$  et  $y_n$ .

Se pose alors la question du comportement de ces approximations par rapport à l'énergie. On cherche donc à comprendre comment l'analyse mathématique des modèles numériques nous conduit à privilégier ceux qui « conservent » les propriétés physiques d'un problème.

## B. Les schémas d'Euler

### B.1. Préliminaire : quelques propriétés théoriques

1. *Équivalence de (1) et (E)*. Justifier le fait que les équations (1) et (E) sont équivalentes au sens suivant :
  - ▷ pour toute solution  $t \mapsto x(t)$  de l'équation (1) il existe une unique fonction  $t \mapsto y(t)$  telle que  $(x, y)$  soit solution de (E),
  - ▷ et pour toute solution  $(x, y)$  de (E), la fonction  $t \mapsto x(t)$  est solution de (1).
2. *Résolution explicite*.  
Soit une solution  $t \mapsto x(t)$  de l'équation (1). Donner l'expression générale de  $x(t)$  en fonction de  $t$  et des valeurs initiales  $x(0)$  et  $x'(0) = \frac{dx}{dt}(0)$ .
3. *Énergie*.  
Pour tout  $u$  et  $v$  dans  $\mathbf{R}$ , on pose  $E(u, v) = u^2 + v^2$ .
  - (a) Soit  $(x, y)$  une solution de (E).  
Montrer que l'application  $t \mapsto E(x(t), y(t))$  définie sur  $[0, +\infty[$  est constante.
  - (b) Soit  $a > 0$ . On nomme  $\mathcal{C}_a$  la courbe plane d'équation  $E(x, y) = a^2$  dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'axe des  $x$  étant l'axe des abscisses et l'axe des  $y$  étant l'axe des ordonnées. Quelle est la nature de cette courbe ?
  - (c) On considère maintenant une solution  $(x, y)$  de l'équation (E). D'après ce qui précède, le point  $M(t)$  du plan de coordonnées  $(x(t), y(t))$  parcourt une courbe  $\mathcal{C}_a$ . Préciser la valeur de  $a$  en fonction des valeurs initiales  $x(0)$  et  $y(0)$ . Dans quel sens le point  $M(t)$  « tourne-t-il » sur la courbe  $\mathcal{C}_a$  ?

### B.2. Préliminaire : étude d'une matrice

On pose  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , déterminer  $R^n$ . On distinguera les cas  $n$  pair et  $n$  impair.

Pour  $a \in \mathbf{R}$ , on pose  $M_a = I_2 + aR$ .

2. Montrer que  $M_a$  est inversible, et exprimer son inverse en fonction de  $a$  et  $R$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , calculer  $M_a^n$ .

Pour  $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ , on note  $E(X) = E(u, v)$ .

4. Calculer  $E(M_a X)$  en fonction de  $E(X)$ .
5. Calculer  $E(M_a^{-1} X)$  en fonction de  $E(X)$ .

### B.3. Le problème de l'approximation

1. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle  $[t, t+h]$ . On sait que l'on a  $f(t+h) - f(t) = \int_t^{t+h} f'(s) ds$ .  
La méthode des rectangles à gauche consiste à approcher l'intégrale ci-dessus par  $f'(t) \times h$ .  
La méthode des rectangles à droite consiste à approcher cette intégrale par  $f'(t+h) \times h$ .  
La méthode des trapèzes consiste à approcher l'intégrale par la demi-somme des approximations selon les rectangles à gauche et à droite.  
Représenter sur un même graphique les trois aires ainsi décrites.

Soit  $h > 0$  le pas de temps. On pose  $t_n = n \times h$ .

Soit  $(x, y)$  une solution de (E).

1. (a) En utilisant la méthode des rectangles à gauche, justifier les approximations suivantes :

$$(E_g) \quad \begin{aligned} x(t_{n+1}) &\approx x(t_n) + h\omega y(t_n) \\ y(t_{n+1}) &\approx y(t_n) - h\omega x(t_n) \end{aligned}$$

(b) En déduire une matrice  $B$  telle que

$$\begin{pmatrix} x(t_{n+1}) \\ y(t_{n+1}) \end{pmatrix} \approx B \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

On exprimera  $B$  sous la forme d'une matrice  $M_a$ .

2. (a) En utilisant la méthode des rectangles à droite, expliquer les approximations suivantes :

$$(E_d) \quad \begin{aligned} x(t_{n+1}) &\approx x(t_n) + h\omega y(t_{n+1}) \\ y(t_{n+1}) &\approx y(t_n) - h\omega x(t_{n+1}) \end{aligned}$$

(b) En déduire qu'il existe une matrice  $C$  telle que

$$C \begin{pmatrix} x(t_{n+1}) \\ y(t_{n+1}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x(t_n) \\ y(t_n) \end{pmatrix}.$$

On exprimera  $C$  sous la forme d'une matrice  $M_a$ .

#### B.4. Étude de la méthode d'Euler explicite

On construit la suite  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  par  $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} = M_{h\omega} U_n$  et  $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$  où  $a > 0$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $E(x_{n+1}, y_{n+1}) = (1 + h^2\omega^2)E(x_n, y_n)$ .
2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(x_n, y_n)$ .

On souhaite programmer les algorithmes précédents en langage Python. À cet effet, on supposera que la pulsation  $\omega$  est prédéfinie comme une constante globale `omega`.

3. Créer une fonction appelée `euler_exp` prenant en entrée `x0`, `y0`, le pas `h` et un entier positif `N`, et qui renvoie les listes `[x_0, ..., x_N]`, `[y_0, ..., y_N]` issues de l'application de la méthode d'Euler explicite à partir de  $(x_0, y_0)$  avec  $N$  itérations.
4. Créer une fonction appelée `euler_exp2` prenant en entrée `x0`, `y0`, le pas `h` et une erreur relative maximale `err` et qui renvoie les listes `[x_0, ..., x_N]`, `[y_0, ..., y_N]` issues de l'application de la méthode d'Euler explicite à partir de  $(x_0, y_0)$  et allant jusqu'au dernier instant  $N$  où  $E(x_N, y_N)$  diffère de  $E(x_0, y_0)$  d'au plus `err` (en valeur relative).
5. (*plus difficile*) Exprimer  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$ .

#### B.5. Étude de la méthode d'Euler implicite

On construit la suite  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  par  $\forall n \in \mathbf{N}, M_{-h\omega} U_{n+1} = U_n$  et  $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$  où  $a > 0$ .

1. Justifier que la suite  $(U_n)_n$  est bien définie et exprimer, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  en fonction de  $x_n$  et  $y_n$ .
2. Montrer que  $E(x_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{1}{1 + h^2\omega^2} E(x_n, y_n)$ .
3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(x_n, y_n)$ .
4. Créer une fonction appelée `euler_imp` prenant en entrée `x0`, `y0`, le pas `h` et un entier positif `N`, et qui renvoie les listes `[x_0, ..., x_N]`, `[y_0, ..., y_N]` issues de l'application de la méthode d'Euler implicite à partir de  $(x_0, y_0)$  avec  $N$  itérations.

#### B.6. Étude de la méthode d'Euler trapézoïdale

Dans le même contexte que dans la partie précédente :

1. (a) En utilisant la méthode des trapèzes, expliquer l'approximation

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) \approx (y(t_n) + y(t_{n+1})) \times \frac{h\omega}{2}.$$

Proposer une approximation similaire pour  $y(t_{n+1}) - y(t_n)$ .

(b) En déduire que  $M_{-h\omega/2} \begin{pmatrix} x(t_{n+1}) \\ y(t_{n+1}) \end{pmatrix} \approx M_{h\omega/2} \begin{pmatrix} x(t_n) \\ y(t_n) \end{pmatrix}$ .

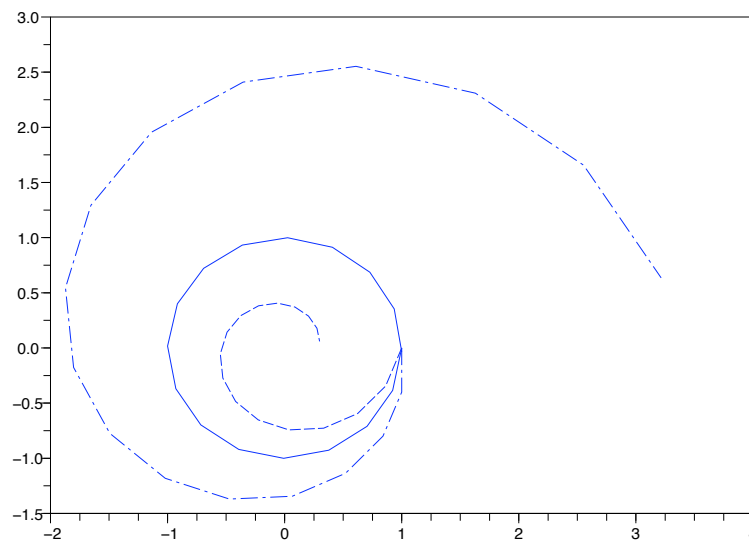
On construit la suite  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  par

$$\forall n \in \mathbf{N}, M_{-h\omega/2} U_{n+1} = M_{h\omega/2} U_n \quad \text{et} \quad U_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a > 0.$$

2. Justifier que la suite est bien définie et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , exprimer  $U_{n+1}$  en fonction de  $U_n$ .
3. Comparer alors  $E(x_{n+1}, y_{n+1})$  et  $E(x_n, y_n)$ .

### B.7. Interprétation

1. Quels commentaires vous inspirent les questions **B.4.1**, **B.5.2** et **B.6.3** ?
2. Sur le graphique suivant (où les  $x$  sont représentés en abscisse et les  $y$  en ordonnée), on a présenté trois courbes obtenues en reliant les points obtenus par la méthode d'Euler explicite (courbe  $\mathcal{C}_1$ ), par la méthode d'Euler implicite (courbe  $\mathcal{C}_2$ ) et par la méthode d'Euler trapézoïdale (courbe  $\mathcal{C}_3$ ).



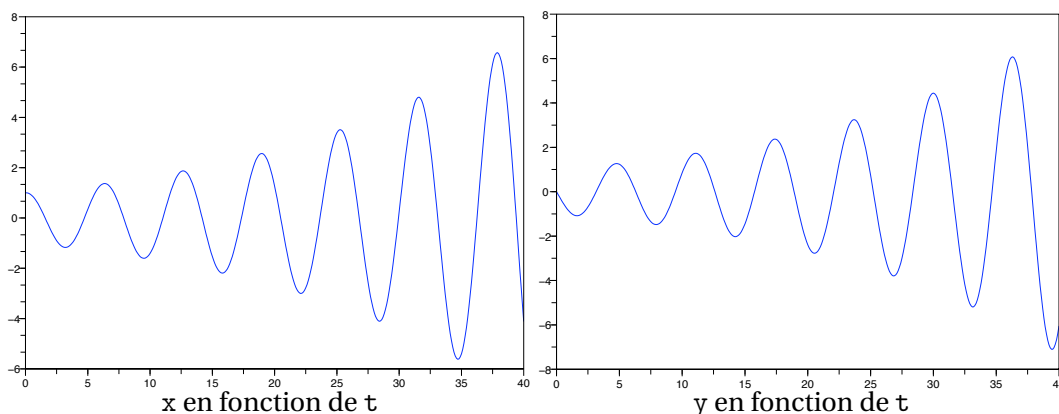
Déterminer laquelle des courbes est  $\mathcal{C}_1$ , laquelle est  $\mathcal{C}_2$  et laquelle est  $\mathcal{C}_3$ .  
Expliquer les raisons qui vous ont amené à faire ces choix.

### C. Période des solutions approchées

Cette partie propose une étude informatique analysant les solutions approchées de l'équation différentielle ( $E$ ), en suivant un point de vue purement empirique.

En utilisant une certaine méthode de calcul numérique, on a créé trois listes  $t$ ,  $x$  et  $y$  :

$t$  est la liste  $(0, h, 2h, \dots, Nh)$ , tandis que  $x$  et  $y$  sont les listes  $(x_0, \dots, x_N)$  et  $(y_0, \dots, y_N)$  qui fournissent une approximation de la solution de l'équation ( $E$ ). On observe alors une sorte de cyclicité dans ce mouvement et on cherche à évaluer les durées des cycles successifs.



1. On propose la fonction Python suivante :

```
def fun1(L) :
    taille = len(L)
    index = 0
    continuer = True
    while (index < taille-1) and continuer :
        if L[index] * L[index+1] < 0 :
            continuer = False
            index = index+1
    return index;
```

Expliquer ce que fait cette fonction.

2. Proposer une fonction Python appelée `zeros` qui prend en entrée une liste `L` et renvoie la liste de toutes les positions `i` telles que `L[i]` et `L[i+1]` soient de signes différents.
3. Proposer une fonction Python `maxima` qui prend en entrée une liste de nombres `L` et renvoie la liste des positions des maxima locaux.  
Par exemple, `maxima([1, 0, 1, -1, 2, 1, 0, 1, 3, 4, 3])` renverra `[0, 3, 8]`.
4. Proposer un protocole, bâti à l'aide d'un ou plusieurs des outils précédents, pour calculer les durées successives des différents cycles du mouvement approché.

#### D. La méthode d'Euler dans le cas dissipatif

On s'intéresse dans cette dernière partie au problème de l'oscillateur harmonique amorti, auquel on peut adapter les méthodes de résolution approchées développées dans la partie B.

L'oscillateur amorti est décrit par l'équation

$$(2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

où  $\alpha$  et  $\omega$  sont deux constantes strictement positives.

1. Donner une expression des solutions de l'équation (2).
2. Proposer une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de (2) présentent des oscillations.

On supposera dans la suite que  $\alpha$  est suffisamment petit pour que cette condition soit réalisée.

3. Soit  $x$  une solution de (2). On introduit la fonction  $y$  comme dans la partie B, sous la forme

$$y = \frac{1}{\omega} \frac{dx}{dt}.$$

et, à nouveau, la fonction « énergie »  $E(u, v) = u^2 + v^2$ . Montrer que l'énergie du système  $E(x(t), y(t))$  décroît et tend vers 0 quand le temps  $t$  tend vers  $+\infty$ .

4. On met en place la méthode d'Euler explicite avec un pas  $h > 0$  pour ce nouveau problème.  
Expliquer et justifier l'introduction d'une suite de vecteurs colonnes  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, X_{n+1} = AX_n \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h\omega \\ -\omega h & 1 - \alpha h \end{pmatrix}.$$

5. Justifier qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$  inversible, et deux complexes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de module 1 tels que

$$A = (1 - \alpha h + h^2 \omega^2) P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

6. On pose  $B = P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ . Montrer que la suite de terme général  $E(B^n X_0)$  est bornée.

7. En déduire qu'il existe un  $h_0 > 0$  tel que

$$\forall h \in ]0, h_0[, \lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = 0.$$

8. Que dire alors de ce modèle numérique ?