DEVOIR SURVEILLÉ / CONCOURS BLANC # 6
le Jeudi 09/01/2019, 13h30 ⟶ 16h

*Épreuve de format «**Calculs & Raisonnements**» du concours A-ENV*

Consignes La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
<u>L'usage de la calculatrice est interdit.</u>

SCAV
Service des Concours Agronomiques et Vétérinaires
AgroParisTech

Problème 1 Soit

$$A=\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12}\end{pmatrix}=\frac{1}{12}B \quad \text{avec} \quad B=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7\end{pmatrix}.$$

On souhaite trouver les éléments propres de A par deux méthodes différentes.

Partie I— Méthode matricielle.

1 — 1.1. Montrer que $\mathrm{Spec}(A)=\left\{\frac{\lambda}{12},\ \lambda\in\mathrm{Spec}(B)\right\}$. Que dire des vecteurs propres de A par rapport à ceux de B ?

1.2. Déterminer les éléments propres de A.

1.3. Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé. Les vecteurs seront choisis de troisième composante égale à 1. En déduire l'existence d'une matrice R réelle et inversible telle que

$$R^{-1}AR=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

1.4. Calculer R^{-1} (le détail des calculs figurera sur la copie).

Partie II— Méthode utilisant un endomorphisme.

Rappelons que $\mathbf{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

2 — 2.1. Rappeler sans démonstration la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}_2[X]$, ainsi que sa dimension.

2.2. On considère l'application $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P^* \end{array}\right.$ où P^* est définie par :

$$\forall x\in\mathbf{R}^*,\quad P^*(x)=\frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{et} \qquad P^*(0)=P(0).$$

Démontrer que P^* est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, et que φ est bien un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

2.3. Calculer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}_2[X]$ (les polynômes de $\mathscr{B}$ seront rangés par ordre de degré croissant).
2.4. Notons $f_0 : x \longmapsto (x-1)^2$, $f_1 : x \longmapsto (x-1)(x+1)$ et $f_2 : x \longmapsto (x+1)^2$. Montrer que $\mathscr{F} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
2.5. Soit P appartenant à $\mathbf{R}_2[X]$. En notant (c_0, c_1, c_2) ses composantes dans la base $\mathscr{F}$, exprimer c_0, c_1 et c_2 en fonction de $P(1)$, $P(-1)$ et $P'(1)$, dérivée de P en 1.
2.6. Calculer $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ dans la base $\mathscr{F}$ puis écrire la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{F}$.
2.7. Écrire la relation matricielle entre M et M' et retrouver les résultats de la question 1.

Partie III— Application à l'étude de trois suites numériques.

Considérons trois suites réelles u, v et w définies sur $\mathbf{N}$ qui vérifient les relations :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 2v_n + w_n}{12}, \\ v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 2v_n - w_n}{3}, \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n - 2v_n + 7w_n}{12}. \end{cases}$$

3 — **3.1.** Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de A^n (on pensera à utiliser la réduction de la matrice A). En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n et des réels u_0, v_0 et w_0.
3.2. Les suites u, v et w sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leur limite respective.

Problème 2 On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue. Pour tout k de $\mathbf{N}^*$, on note :
— B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au k-ième tirage »,
— R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au k-ième tirage ».

Partie I— Rang d'apparition de la première boule bleue.

On définit, pour $n \in \mathbf{N}^*$, les événements L_n : « la première boule bleue est obtenue au n-ième tirage ».
1 — ***(Question de cours)*** Rappeler l'énoncé de la formule des probabilités composées.
2 — Montrer : $\quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(L_n) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
3 — Vérifier que la série $\left(\sum \mathbf{P}(L_n)\right)_{n\geq 1}$ converge et que sa somme est égale à 1. *Indication : On pourra chercher $a, b \in \mathbf{R}$ tels que :* $\quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2}$.
4 — **4.1.** Exprimer l'évènement L « tirer une boule bleue au cours de l'expérience » en fonction des L_n pour $n \in \mathbf{N}^\star$.
4.2. En déduire la probabilité de tirer au moins une boule bleue au cours de cette expérience. Commentez votre résultat.

Partie II— Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

On définit, pour tout k de $\mathbf{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.
5 — Reconnaitre la loi de X_1, son espérance , sa variance.
6 — Quelles sont les valeurs prise par la variable aléatoire S_n ?
7 — Donner, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbf{N}^*$.
8 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0; n]\!]$.
8.1. Calculer $\quad \mathbf{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.
8.2. Justifier : $\quad \mathbf{P}([S_n = k]) = \dbinom{n}{k} \mathbf{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$, puis en déduire : $\quad \mathbf{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.
9 — En déduire l'espérance de la variable aléatoire S_n.

Correction

Solution (Problème 1)

1 — Soit $(\lambda, X) \in \mathbf{R}\times\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbf{R})\setminus\{0\}$ tel que : $AX = \lambda X$. Alors $BX = \dfrac{\lambda}{12}X$. Cette identité prouve que $\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \left\{\dfrac{\lambda}{12},\ \lambda \in \mathrm{Spec}(B)\right\}}$ et que les éléments propres de A sont les mêmes que les éléments propres de B.

1.1. On note $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}B$ où $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Puisque $BX = \lambda X$, avec $X \neq 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ est équivalente à $AX = \dfrac{\lambda}{12}X$, nous avons : B et A qui ont les mêmes espaces propres, et les valeurs propres de A sont obtenues en divisant celles de B par 12.

Bien sûr, on peut travailler directement avec la matrice de départ, mais c'est bien plus long. N'est-ce pas ?

Alors étudions, pour $\lambda \in \mathbf{R}$ le rang de $B - \lambda I_3$. En appliquant la méthode du Pivot de Gaußon obtient :

$$
\begin{aligned}
B - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -4 & 8-\lambda & -4 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\
&\sim_L \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7-\lambda \\ -4 & 8-\lambda & -4 \\ 7-\lambda & -2 & 1 \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_3, \\
&\sim_L \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4(6-\lambda) \\ 0 & -2-(7-\lambda)(-2) & (-6+\lambda)(8-\lambda) \end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_2 + 4L_1, L_3 \leftarrow L_3 - (7-\lambda)L_1, \\
&\sim_L \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4(6-\lambda) \\ 0 & 2(6-\lambda) & (-6+\lambda)(8-\lambda) \end{pmatrix}, \\
&\sim_L \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7-\lambda \\ 0 & 12 & -8(6-\lambda)+(\lambda-6)(8-\lambda) \\ 0 & 2(6-\lambda) & (-6+\lambda)(8-\lambda) \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow -2L_2 + L_3 \\
&\sim_L \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7-\lambda \\ 0 & 12 & -8(6-\lambda)+(\lambda-6)(8-\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow 6L_3 - (6-\lambda)L_2
\end{aligned}
$$

où $P(\lambda) = 6(-6+\lambda)(8-\lambda) - (6-\lambda)\left(-8(6-\lambda)+(\lambda-6)(8-\lambda)\right) = (6-\lambda)(6(\lambda-8)+8(6-\lambda)-(\lambda-6)(8-\lambda))$. On constate que les racines de $\lambda \mapsto 6(\lambda-8)+8(6-\lambda)-(\lambda-6)(8-\lambda)$ sont 4 et 12. On déduit que $\mathrm{Spec}\, B = \{4, 6, 12\}$

donc $\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}.}$

Nous avons trois valeurs propres distinctes, la matrice est donc diagonalisable.

1.2. Il reste à calculer les espaces propres, on trouve en utilisant la forme échelonnée précédente :

$$
\boxed{E_1(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad E_{1/2}(A) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad E_{1/3}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.}
$$

Ainsi, en posant $\boxed{R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ nous obtenons : $R^{-1}AR = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1.3. Après application du pivot, ou bien résolution d'un système linéaire, nous obtenons :

$$\boxed{R^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}}.$$

2 — 2.1. D'après le cours, $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

2.2. Soit P la fonction polynôme définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ pour $a, b, c \in \mathbf{R}$. Alors

$$\varphi(P)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right) = \frac{ax^2}{3} + \frac{bx}{2} + c.$$

La fonction est encore un polynôme de degré inférieur à deux, et comme l'intégrale est linéaire, on a finalement : $\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathbf{R}_2[X]).}$

2.3. En reprenant l'expression trouvée précédemment $\varphi(P)(x) = \frac{ax^2}{3} + \frac{bx}{2} + c)$, on obtient :

$$\varphi(1)(x) = 1, \quad \varphi(X)(x) = \frac{x}{2}, \quad \varphi(X^2)(x) = \frac{x^2}{3}.$$

De cela, on déduit : $\boxed{\underset{\mathscr{B}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = R^{-1}AR.}$

2.4. Attention, la famille n'est pas échelonnée. Mais nous avons trois fonctions en dimension trois, il suffit de justifier la liberté.
Soit donc $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^3$ tel que : $\quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \lambda_0(x-1)^2 + \lambda_1(x-1)(x+1) + \lambda_2(x+1)^2 = 0$.
Alors en évaluant par exemple en $x = 1$, nous obtenons $4\lambda_2 = 0$ soit $\lambda_2 = 0$. Puis en faisant $x = -1 : 4\lambda_0 = 0$ soit $\lambda_0 = 0$.
Puis pour tout $x \in \mathbf{R}$, il vient $\lambda_1(x-1)(x+1) = 0$, prenant $x = 0$ nous obtenons $\lambda_1 = 0$. Ainsi $\boxed{\text{la famille } (f_0, f_1, f_2) \text{ est une base de } \mathbf{R}_2[X].}$

2.5. Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors le triplet de la question satisfait : $P = c_0 f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2$ soit : $\quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad P(x) = c_0(x-1)^2 + c_1(x-1)(x+1) + c_2(x+1)^2$. Alors en effectuant les opérations données dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} P(1) &= 4c_2 \\ P(-1) &= 4c_0 \\ P'(1) &= 2c_1 + 4c_2 = 2c_1 + P(1). \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{c_0 = \frac{P(-1)}{4}, \quad c_1 = \frac{P'(1) - P(1)}{2}, \quad c_2 = \frac{P(1)}{4}}$.

2.6. On a : $\quad \varphi(f_0)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t-1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$. Attention, le vecteur est ici écrit dans la base canonique $\mathscr{B}$. On l'écrit ensuite dans la base $\mathscr{F}$ en utilisant la question précédente :

$$\varphi(f_0)(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1 = c_0(f_0)f_0 + c_1(f_0)f_1 + c_2(f_0)f_2 = \frac{7}{12}f_0 - \frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{12}f_2.$$

De-même pour les trois autres vecteurs, on trouve finalement :

$$\boxed{M' = \underset{\mathscr{F}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\varphi) = A.}$$

2.7. D'après les formules de changement de base, nous avons :

$$M = \underset{\mathscr{B}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\varphi) = \underset{\mathscr{F},\mathscr{B}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\mathrm{Id})\ \underset{\mathscr{F}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\varphi)\ \underset{\mathscr{B},\mathscr{F}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\mathrm{Id}) = \underset{\mathscr{F},\mathscr{B}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\mathrm{Id})\ M'\ \underset{\mathscr{B},\mathscr{F}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\mathrm{Id}).$$

Enfin, puisque $f_0(x) = x^2 - 2x + 1$, $f_1(x) = x^2 + 0.x - 1$ et $f_2(x) = x^2 + 2.x + 1$, nous avons :

$$\boxed{\underset{\mathscr{F},\mathscr{B}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R}.$$

Soit finalement : $M = R^{-1}M'R = R^{-1}AR$.
Nous avons donc interprété ici la matrice de départ A comme la matrice d'un endomorphisme dans la base $\mathscr{F}$, nous avons exhibé une base propre (la base canonique $\mathscr{B}$), cette interprétation fournit donc la même formule de changement de base que dans la première question.

3 — 3.1. Notons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors le système de suite récurrente se réecrit aussi :

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}.$$

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Alors $A = RDR^{-1}$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = RD^nR^{-1}$.

Initialisation. Pour $n = 1$ le résultat est déjà établi.

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang n, alors $A^{n+1} = ARD^nR^{-1} = RDR^{-1}RD^nR^{-1} = RD^{n+1}R^{-1}$. La formule est prouvée pour tout entier n.

Mais $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$. Donc $X_n = A^nX_0 = \boxed{R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}R^{-1}X_0}$ (à calculer explicitement).

3.2. Puisque chaque coefficient de la matrice A^nX_0 est combinaison linéaire en les coefficients de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$, et que les suites $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(\frac{1}{3^n}\right)$, (1) convergent (suites géométriques), nous avons :

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} u_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} v_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} w_n \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} \end{pmatrix}R^{-1}X_0 = \boxed{R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}R^{-1}X_0}.$$

À nouveau le dernier terme sa calcule explicitement [...].

Solution (Problème 1)

Partie I— Rang d'apparition de la première boule bleue.

1 — Voir cours.
2 — Notons, pour $k \in \mathbf{N}^\star$, B_k l'évènement « une boule bleue est tirée au tirage k ». Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_n) &= \mathbf{P}\left(B_1{}^{\mathsf{C}} \cap \cdots \cap B_{n-1}{}^{\mathsf{C}} \cap B_n\right) = \mathbf{P}\left(B_n | B_1{}^{\mathsf{C}} \cap \cdots \cap B_{n-1}{}^{\mathsf{C}}\right)\mathbf{P}\left(B_{n-1}{}^{\mathsf{C}} | B_1{}^{\mathsf{C}} \cap \cdots \cap B_{n-2}{}^{\mathsf{C}}\right)\ldots\mathbf{P}\left(B_2{}^{\mathsf{C}} | B_1{}^{\mathsf{C}}\right)\mathbf{P}\left(B_1{}^{\mathsf{C}}\right) \\ &= \frac{1}{n+2}\,\frac{n}{n+1}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{4}\,\frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}. \end{aligned}$$

3 — Ici, inutile de faire appel au critère de comparaison puisque l'on sait calculer la somme partielle. En effet, soit $n \in \mathbf{N}^\star$, alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(L_k) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La convergence de la série étudiée en découle, et $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(L_n) = 1.}$

4 — **4.1.** On a $\boxed{L = \biguplus_{n\in\mathbf{N}^\star} L_n}$, puisque :

- $\omega \in L \iff$ il existe un tirage où l'on pioche une bleue $\iff \exists n \in \mathbf{N}^\star, \omega \in L_n$.
- de plus, la réunion est clairement disjointe étant donné que la **<u>première</u>** boule bleue ne peut être piochée à deux tirages en même temps.

4.2. On cherche ainsi $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} L_n\right)$. Comme les évènements L_n sont disjoints, la probabilité cherchée est, par propriété d'additivité dénombrable :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(L_n) = 1.}$$

Nous tirerons donc presque-sûrement une boule bleue au cours de l'expérience.

Partie II— Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

5 — La variable X_1 suit une loi $\mathscr{B}(2/3)$. Elle est donc d'espérance $2/3$ et de variance $\frac{2}{9}$.

6 — La variable aléatoire S_n est à valeurs dans $\boxed{[\![0\,,n]\!].}$

7 — On a de manière évidente $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$

8 — On se fixe dans cette question $n \in \mathbf{N}^\star$ et $k \in [\![0\,,n]\!]$.

8.1. On utilise comme précédemment la formule des probabilités composées à l'intersection ci-dessous.

$$\mathbf{P}\left(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n\right) = \frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)} \cdots \frac{2}{4+k}\,\frac{1}{3+k}\,\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)} \cdots \frac{4}{5}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}$$
$$= \boxed{\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}}.$$

8.2. Les probabilités $\mathbf{P}\left(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n\right)$ dépendent uniquement du nombre de R_i présents, et du nombres de B_i présents pour $i \in [\![0\,,n]\!]$. En revanche, elles ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les évènements apparaissent (un ordre différent ne fera que changer l'ordre des fractions apparaissant dans la question précédente).
Autrement dit, l'évènement $\{S_n = k\}$ s'écrit comme une réunion disjointe d'évènements de même probabilité, et au nombre $\binom{n}{k}$ (le nombre de façons de placer les k tirages de rouge parmi les n). D'où la formule de l'énoncé.

Ainsi $\mathbf{P}\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k}\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \boxed{\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}}$ après simplifications.

9 — Comme $S_n(\Omega) = [\![0\,,n]\!]$, la variable aléatoire S_n admet forcément une espérance, et nous avons

$$\mathbf{E}\left(S_n\right) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\,\frac{n(n+1)}{2}\,\frac{2(n+2)}{3} = \boxed{\frac{2n}{3}.}$$