DEVOIR SURVEILLÉ # 1
le Samedi 21/09/2019, 3 heures

Consignes

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

Remarque inhibitrice de stress : le sujet est bien évidemment trop long pour trois heures.

Exercice 1

1 — Déterminer les valeurs de $m \in \mathbf{R}$ pour lesquelles (X_1, X_2, X_3, X_4) est une famille génératrice de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ où :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indication : On pourra donc chercher le rang de la matrice associée à la famille.

2 — Lorsque $\mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4) \neq \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbf{R})$, déterminer sa dimension.

Exercice 2

On note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+3} = 12u_{n+1} - 16u_n.$$

1 — Créer une fonction Python `SuiteU(n, u0, u1)`, qui étant donnés un entier `n` et deux valeurs `u0, u1`, crée une liste contenant tous les termes de la suite (u_n) jusqu'au rang n où (u_n) vérifie : $u_0 = u0$, $u_1 = u1$.

2 — Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, où $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs réelles.

3 — **3.1.** Montrer que les seuls réels r non nuls tels que $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit dans E sont $\alpha = -4$ et $\beta = 2$.
3.2. Vérifier que la suite $(n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est aussi élément de E.
3.3. Montrer que la famille $((\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}, (n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}, (\beta^n)_{n\in\mathbf{N}})$ est libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

4 — On note à présent $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle $a_0 = 1$ et $a_1 = a_2 = 0$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle $b_1 = 1$ et $b_0 = b_2 = 0$, et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle $c_2 = 1$ et $c_0 = c_1 = 0$.
4.1. Montrer que les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont linéairement indépendantes. *On pourra essayer de se ramener à la résolution d'un système linéaire en les constantes de la combinaison linéaire nulle...*
4.2. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E, combinaison linéaire de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Que valent nécessairement les coefficients de ladite combinaison linéaire ?
4.3. En déduire par récurrence double/forte que toute suite de E est combinaison linéaire de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Qu'en déduit-on sur la dimension de E ?

4.4. Montrer, sans calcul supplémentaire et en utilisant **3.**, que toute suite de E s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme $(\lambda\alpha^n + (\mu n + \nu)\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}$, où $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$.

5 — On note B l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E pour lesquelles : $u_n e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5.1. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

5.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \lambda(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}} + \mu(n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} + \nu(\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de E, avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$. Montrer que :

$$(u_n) \in \mathrm{B} \iff [\lambda = 0].$$

5.3. En déduire la dimension de B.

■ **Problème** Dans tout le problème, n est un entier strictement supérieur à 1. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne à coefficients réels. On rappelle que ce sont deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et que $\dim \mathfrak{M}_n(\mathbf{R}) = n^2$ et $\dim \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = n$. On note I la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$. On dit qu'un sous-espace vectoriel E de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ vérifie la propriété $(\star)$ si on a :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E}, \quad \Big(\mathrm{A} \text{ non inversible} \iff \mathrm{A} = 0\Big).$$

(c'est à dire si la seule matrice non inversible de E est la matrice nulle). Par exemple si $n = 2$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ne vérifie pas la propriété $(\star)$ puisqu'aucune matrice de cet espace vectoriel n'est inversible. Autrement dit, « E ne vérifie **pas** $(\star)$ » signifie qu'il existe une matrice non inversible et non nulle dans E.

On appelle p le plus grand entier tel qu'il existe un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension p vérifiant $(\star)$.

1 — ***(Question de cours)*** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{G}$ une famille génératrice, $\mathcal{L}$ une famille libre. Rappeler l'encadrement du cours entre n, $\#\,\mathcal{G}$ et $\#\,\mathcal{L}$. Ceci pourra servir dans la suite.

Partie I— Quelques généralités.

2 — Soit $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$, telle que $\mathrm{M} \neq 0$ et soit $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{M})$. Montrer que : E vérifie $(\star) \iff$ M est inversible. En déduire $p \geqslant 1$.

3 — Justifier que $p < n^2$. <u>Indication :</u> *On pourra d'abord justifier l'inégalité large, puis montrer l'inégalité stricte par l'absurde.*

4 — Soit $k > n$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension k. Notons $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_k)$ une base de E et X un élément non nul de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. À quel espace appartiennent les éléments $\mathrm{A}_k\mathrm{X}$? Montrer alors que $(\mathrm{A}_1\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{A}_k\mathrm{X})$ est liée, et en déduire que E ne vérifie pas $(\star)$. Justifier $p \leqslant n$.

5 — Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$. Soit également M une matrice inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ et

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{MA}, \ \mathrm{A} \in \mathrm{E}\}.$$

5.1. Montrer que F est lui aussi un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$.

5.2. Montrer que E, F sont isomorphes, de même dimension. <u>Indication :</u> *On pourra introduire l'application φ définie par $\varphi(\mathrm{A}) = \mathrm{MA}$ pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$.*

6 — Montrer que F vérifie $(\star)$ si et seulement si E vérifie $(\star)$. <u>Indication :</u> *On pourra, par exemple, établir que F ne vérifie pas $(\star)$ si et seulement si E ne vérifie pas $(\star)$.*

7 — Montrer que si $k \in [\![0\,,\,p]\!]$, alors il existe un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$, de dimension k, qui vérifie $(\star)$.

Partie II— Cas $n = 2$.

On se place dans le cas $n = 2$.

8 — Au vu de la première partie, quelles sont les valeurs possibles pour p ?

9 — Montrer en utilisant l'application déterminant que le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ suivant vérifie $(\star)$:

$$\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbf{R} \right\}.$$

10 — Que vaut $\dim \mathrm{E}$? En déduire la valeur de p.

Partie III— Cas $n = 3$.

On se place dans le cas $n = 3$. On appelle *déterminant* l'application

$$\det : \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_3(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & \longmapsto & aei + dhc + gbf - ahf - bdi - gec. \end{array} \right.$$

On admet que pour $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$, on a : $\quad$ A non inversible $\iff$ $\det \mathrm{A} = 0$.

11 — Au vu de la première partie, quelles sont les valeurs possibles pour p ?

12 — Soit E un espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$ de dimension 2 et soit (A, B) une base de E.

12.1. On suppose dans cette question que B n'est pas inversible. Montrer que E ne vérifie pas $(\star)$.

On suppose dans la suite de cette partie que B est inversible et on note $\mathrm{C} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}$.

12.2. Montrer, en utilisant les résultats de la première partie, que E vérifie $(\star)$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(\mathrm{C}, \mathrm{I})$ vérifie $(\star)$.

12.3. Montrer que l'application $\mathrm{P} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ t \longmapsto \det(\mathrm{I} + t\mathrm{C})$, est un polynôme et déterminer son degré. Justifier que P admet au moins une racine réelle.

12.4. Montrer que E ne vérifie pas $(\star)$.

13 — Déduire de ce qui précède la valeur de p.

Partie IV— Cas $n = 4$.

On se place dans le cas $n = 4$. On introduit

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L})$.

14 — Calculer $\mathrm{I}^2, \mathrm{J}^2, \mathrm{K}^2, \mathrm{L}^2, \mathrm{JK}, \mathrm{KJ}, \mathrm{JL}, \mathrm{LJ}, \mathrm{KL}, \mathrm{LK}$.

15 — Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Calculer $(a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K} + d\mathrm{L})(a\mathrm{I} - b\mathrm{J} - c\mathrm{K} - d\mathrm{L})$. <u>*Indication :*</u> *Le résultat est colinéaire à l'une des matrices* I, J, K, L.

16 — En déduire que E vérifie $(\star)$, puis la valeur de p.

Correction

Solution (Exercice 1)

1 — La famille $\mathcal{B}_m = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est génératrice si et seulement si $\mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ donc si et seulement si

$$\mathrm{Rg}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

On applique la méthode du pivot de Gauß pour trouver ce rang.

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix} \qquad L2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - mL_1$$

$$= 1 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & m-1 & 1-m \\ m-1 & 0 & 1-m \\ 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix} \qquad L2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$= 1 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & (1-m)(2+m) \\ 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix}$$

Deux cas se produisent alors.

① Si $m \neq 1$: alors $\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} m-1 & 1-m \\ 1-m & (1-m)(2+m) \end{pmatrix} = 2 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2+m \end{pmatrix} = 2 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & m+3 \end{pmatrix}$

en simplifiant par $1 - m \neq 0$ puis en ajoutant la première ligne à la première. Cette dernière matrice est de rang un si $m = -3$ et de rang deux sinon.

② Si $m = 1$: nous obtenons clairement $\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

En résumé : $\boxed{\mathcal{B}_m \text{ est génératrice de } \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \text{ si et seulement si } m \notin \{-3, 1\}.}$

Une autre possibilité, comme nous avons une famille libre à quatre éléments en dimension quatre, est de vérifier la liberté.

2 — D'après ce qui précède nous constatons immédiatement que :

① Si $m = 1$: $\dim \mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4) = 1$.

② Si $m = -3$: $\dim \mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4) = 3$.

Solution (Exercice 2)

1 —

```python
def SuiteU(n, u0, u1):
    L = []
    L.append(u0)
    L.append(u1)
    for k in range(2,n+1):
        L.append(12*L[-1]-16*L[-2])
    return L
```

Par exemple, voici les termes jusque u_{10} : [1, 1, -4, -64, -704, -7424, -77824, -815104, -8536064, -89391104, -936116224].

2 — Il est clair que $E \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Si (u_n) est la suite nulle, alors on a bien :

$$u_{n+3} = 12u_{n+1} - 16u_n.$$

Ainsi, $0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}} \in E$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $(u_n) \in E$ et $(v_n) \in E$. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda u_{n+3} + \mu u_{n+3} &= \lambda(12u_{n+1} - 16u_n) + \mu(12v_{n+1} - 16v_n)\\ &= 12(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - 16(\lambda u_n + \mu v_n).\end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in E$. Ainsi, $\boxed{\text{E est un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}^{\mathbf{N}}}$.

3 — **3.1.** Soit $r \in \mathbf{R}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}(r^n) \in E &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ r^{n+3} = 12r^{n+1} - 16r^n\\ &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ r^3 = 12r - 16 \quad (\text{car } r^n \neq 0)\\ &\iff r^3 - 12r + 16 = 0\\ &\iff (r-2)(r^2 + 2r - 8) = 0 \quad (\text{2 est racine évidente})\\ &\iff (r-2)^2(r+4) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les seules suites géométriques de E sont } (\alpha^n) \text{ et } (\beta^n)}$, où $\boxed{\alpha = -4}$ et $\boxed{\beta = 2}$.

3.2. Considérons $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} = (n2^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Alors :

$$\begin{aligned}12u_{n+1} - 16u_n &= 12(n+1)2^{n+1} - 16n2^n\\ &= 24n2^n + 24.2^n - 16n2^n\\ &= 8n2^n + 24.2^n\\ &= (n+3)2^{n+3}\\ &= u_{n+3}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(n\beta^n) \in E}$.

3.3. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}} + \mu(n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} + \nu(\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} = 0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\lambda(-4)^n + \mu n2^n + \nu 2^n = 0.$$

Ces égalités donnent pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ le système :

$$\left\{\begin{array}{llll}\lambda & & +\nu & = 0\\ -4\lambda & +2\mu & +2\nu & = 0\\ 16\lambda & +8\mu & +4\nu & = 0\end{array}\right.$$

La première équation donne alors $\nu = -\lambda$, et les deux suivantes entraînent :

$$\left\{\begin{array}{lll}-6\lambda & +2\mu & = 0\\ 12\lambda & +8\mu & = 0\end{array}\right.$$

Ainsi, $\mu = 3\lambda$, d'où $\lambda = 0$ puis $\mu = \nu = 0$. Finalement,
$\boxed{\text{les suites } (\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}},\ (n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ sont linéairement indépendantes}}$.

4 — 4.1. Soit $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbf{R}^3$ tel que $\lambda(a_n)_{n\in\mathbf{N}}+\mu(b_n)_{n\in\mathbf{N}}+\nu(c_n)_{n\in\mathbf{N}}=0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}$. Alors pour tout $n\in\mathbf{N}$:

$$\lambda a_n+\mu b_n+\nu c_n=0.$$

Ces égalités donnent pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$ le système :

$$\begin{cases}\lambda & =0\\ \quad\mu & =0\\ \qquad\nu & =0\end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\in\mathbf{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ sont linéairement indépendantes}}$.

4.2. Soit (u_n) une suite de E. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}=\lambda(a_n)_{n\in\mathbf{N}}+\mu(b_n)_{n\in\mathbf{N}}+\nu(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbf{R}^3$, alors en considérant les 3 premiers termes de ces suites on obtient les égalités :

$$\begin{cases}u_0= & \lambda\\ u_1= & \quad\mu\\ u_2= & \qquad\nu\end{cases}$$

ce qui détermine complètement les trois constantes λ, μ et ν.

4.3. Réciproquement, montrons par récurrence double/forte sur $n\in\mathbf{N}$ la proposition :

$$\mathcal{P}_n\ :\ «\ u_n=u_0a_n+u_1b_n+u_2c_n\ ».$$

<u>Initialisation</u>. Comme $a_0=1$ et $b_0=c_0=0$, alors on a bien $u_0=u_0a_0+u_1b_0+u_2c_0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. De même, $b_1=1$ et $a_1=c_1=0$, d'où $\mathcal{P}_1$, et $c_2=1$ et $a_2=b_2=0$, d'où $\mathcal{P}_2$.
<u>Hérédité</u>. Supposons $\mathcal{P}_0,\dots,\mathcal{P}_{n+1}$ et $\mathcal{P}_{n+2}$ vraies pour un certain $n\in\mathbf{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}u_{n+3}&=12u_{n+1}-16u_n\\ &=12(u_0a_{n+1}+u_1b_{n+1}+u_2c_{n+1})\qquad\text{(par hypothèse}\\ &\qquad -16(u_0a_n+u_1b_n+u_2c_n)\qquad\text{de récurrence)}\\ &=u_0(12a_{n+1}-16a_n)+u_1(12b_{n+1}-16b_n)+u_2(12c_{n+1}-16c_n)\\ &=u_0a_{n+3}+u_1b_{n+3}+u_2c_{n+3}\quad\text{(car } (a_n)\in E,\ (b_n)\in E \text{ et } (c_n)\in E)\end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}_{n+3}$.
<u>Conclusion</u>. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbf{N}$. Ainsi, on a bien prouvé que :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}=u_0(a_n)_{n\in\mathbf{N}}+u_1(b_n)_{n\in\mathbf{N}}+u_2(c_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{toute suite de E est combinaison linéaire de } (a_n)_{n\in\mathbf{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbf{N}}}$.

4.4. On déduit de la question précédente que $E\subset\operatorname{Vect}((a_n),(b_n),(c_n))$. Comme $((a_n),(b_n),(c_n))$ est une famille libre de vecteurs de E, alors c'est même une base de E, qui est donc un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On a prouvé que $((\alpha^n),(n\beta^n),(\beta^n))$ est une famille libre de vecteurs de E. Comme cette famille est constituée de $3=\dim_{\mathbf{R}}E$ vecteurs, alors c'est une base de E. Ainsi,
$\boxed{\text{toute suite de E s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme } (\lambda\alpha^n+(\mu n+\nu)\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}, \text{ où } (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbf{R}^3}$.

5 — 5.1. Voir la dernière question où l'on exprime B comme un Vect (sinon vérifier les différents axiome d'un espace vectoriel).

5.2. Soit $(u_n)\in E$. D'après la question précédente, il existe $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbf{R}^3$ tel que :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}=\lambda(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}+\mu(n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}+\nu(\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Alors $(u_n)\in B$ si et seulement si :

$$(\lambda\alpha^n+\mu n\beta^n+\nu\beta^n)e^{-n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Comme $0\leqslant\beta=2<e$, alors $0\leqslant\frac{\beta}{e}<1$ donc $\beta^ne^{-n}=\left(\frac{\beta}{e}\right)^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. De même, $\ln\frac{e}{\beta}>0$, donc par le théorème de croissances comparées, $n=o\left(e^{n\ln\frac{e}{\beta}}\right)=o\left(\frac{e^n}{\beta^n}\right)$. Ainsi, $n\beta^ne^{-n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Finalement, on a donc :

$$(u_n)\in B\iff\left[\lambda\alpha^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\right].$$

Comme $|\alpha| > 1$, alors $|\alpha^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi :

$$(u_n) \in B \iff \lambda = 0.$$

On en déduit aussi que $\boxed{B = \mathrm{Vect}((n\beta^n), (\beta^n))}$ donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

5.3. Comme $((n\beta^n), (\beta^n))$ est une famille libre (c'est une famille extraite d'une famille libre), alors c'est une base de B. Ainsi, $\boxed{\dim_{\mathbf{R}} B = 2}$.

■■ *Solution (Problème 2)*

Partie I— Quelques généralités.

1 — Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$, telle que $M \neq 0$ et soit $E = \mathrm{Vect}(M)$. Montrons que E vérifie $(\star)$ si et seulement si M est inversible.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que M est inversible, alors toutes les matrices de la forme λM avec $\lambda \in \mathbf{R}^\star$ sont inversibles aussi. Donc la seule matrice inversible de cet espace vectoriel est la matrice nulle.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que E vérifie $(\star)$, alors puisque $M \neq 0$ par hypothèse, la matrice M est inversible. Donc on a bien montré $\boxed{\text{E vérifie } (\star) \text{ si et seulement si M est inversible.}}$

On déduit alors $\boxed{p \geqslant 1}$ puisque $\dim \mathrm{Vect}(M) \geqslant 1$.

2 — Nous avons $p \leqslant n^2$ puisque l'on étudie des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, qui est de dimension n^2. De plus, si $p = n^2$, alors il existerait un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ vérifiant $(\star)$, donc autrement dit $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ vérifierait $(\star)$ (on rappelle que de manière générale $F \subset E$ et $\dim F = \dim E \implies F = E$). Or, $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ ne vérifie pas $(\star)$ car par exemple $\mathrm{Diag}(1, 0, \dots, 0)$ est non inversible et pourtant elle n'est pas nulle. Donc $\boxed{p < n^2}$.

3 — Soit $k > n$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension k. La famille $(A_1X, \dots, A_kX)$ est liée car c'est une famille de cardinal k de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ qui est de dimension n, donc d'après le cours on sait alors que $(A_1X, \dots, A_kX)$ ne peut être libre puisque $k > n$.
Donc, il existe une combinaison linéaire nulle non triviale, *i.e.* :

$$\exists(\lambda_0, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0),\ \lambda_0A_0X + \cdots + \lambda_kA_kX = (\lambda_0A_0 + \cdots + \lambda_kA_k)X = 0.$$

La matrice $\lambda_0A_0 + \cdots + \lambda_kA_k$ est alors non inversible (il existe un vecteur non nul du noyau), et pourtant elle n'est pas nulle (car sinon $(A_1, \dots, A_k)$ ne serait pas une base).
Donc $\boxed{\text{E ne vérifie pas } (\star).}$ Il vient alors $p \leqslant n$.

4 — **4.1.** Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$. Soit également M une matrice inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ et $F = \{MA,\ A \in E\}$. Montrons que F est lui aussi un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$. En effet,

① On a $F \subset \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$.

② On a $0 = M0$.

③ Et si MA, MA' sont dans F, soient de plus $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, alors $\lambda MA + \mu MA' = M(\lambda A + \mu A')$ est également dans F.

4.2. L'application $\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ A & \longmapsto & MA \end{array} \right.$ est bien définie, elle est linéaire, et si $\varphi(A) = 0 = MA$ alors comme M est inversible on a $A = 0$ donc $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$. l'application φ est donc injective, mais aussi surjective par construction. Donc φ est un isomorphisme, et par conséquent $\dim F = \dim E$.

5 — Reste à montrer que F vérifie $(\star)$ si et seulement si E vérifie $(\star)$. L'espace vectoriel F ne vérifie pas $(\star)$ si et seulement si il existe une matrice de la forme MA non nulle et non inversible.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons cela. Alors A est elle aussi non nulle puisque M est inversible, et elle est non inversible (sinon puisque M est inversible MA le serait aussi par produit).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe une matrice $A \in E$ inversible et non nulle. Alors MA vérifie les mêmes propriétés puisque M est inversible, donc F ne vérifie par $(\star)$.

6 — Montrons que si $k \in [\![0\,,\,p]\!]$, alors il existe un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$, de dimension k, qui vérifie $(\star)$.
En effet, par définition de p, il existe déjà un espace vectoriel E vérifiant $(\star)$, et de dimension p. Notons $(A_1, \dots, A_p)$ une base de E. Puisque $k \leqslant p$, considérons $(A_1, \dots, A_k)$. Alors elle est de cardinal k, et libre car extraite d'une famille libre. Donc c'est une base de $F = \mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_k)$. Il est immédiat que F satisfait $(\star)$, puisque $F \subset E$.

Partie II— Cas $n = 2$.

On se place dans le cas $n = 2$.

7 — Nous avons $p \in \{1, 2\}$ puisque $1 \leqslant p \leqslant n = 2$.

8 — Montrons que le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ suivant vérifie $(\star)$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbf{R} \right\}.$$

Une matrice A de cet espace est inversible, si et seulement si :

$$\det(A) = a^2 + b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = 0.$$

Donc $\boxed{\text{E vérifie } (\star).}$

9 — Puisque $E = \text{Vect}\left\{ I, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. C'est clairement un espace vectoriel de dimension 2, et il vérifie $(\star)$ d'après la question précédente. Donc $\boxed{p = 2}$.

Partie III— Cas $n = 3$.

10 — De la même manière on trouve que $p \in [\![1\,,\,3]\!]$.

11 —**11.1.** On suppose dans cette question que B n'est pas inversible. Montrons que E ne vérifie pas $(\star)$.
Puisque (A, B) est une base de E, en particulier $B \neq 0$. Mais alors B est un élément non nul de E qui est non inversible, et donc : $\boxed{\text{E ne vérifie pas } (\star).}$

On note $C = B^{-1}A$.

11.2. Montrons que E vérifie $(\star)$ si et seulement si $\text{Vect}(C, I)$ vérifie $(\star)$.
C'est une conséquence de la première partie consacrée à l'étude de F : en effet, notons $E = \text{Vect}(C, I)$, alors $F = \text{Vect}(A, B)$ avec les mêmes notations pour F que dans la première partie.

11.3. Notons $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors $C + tI = \begin{pmatrix} a+t & b & c \\ d & e+t & f \\ g & h & i+t \end{pmatrix}$. Donc

$$P(t) = (a+t)(e+t)(i+t) + dhc + gbf - (a+t)hf - bd(i+t) - g(e+t)c.$$

Alors en développant on forme un polynôme de degré trois, de terme dominant t^3. Ainsi, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} P(t) = \pm\infty$ et comme P est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{il existe une racine réelle pour P.}}$

11.4. Montrons que E ne vérifie pas $(\star)$. Notons t_0 une racine réelle de P, alors $C + t_0 I$ n'est pas inversible, et pourtant elle est non nulle (clair par l'absurde — sinon (A, B) ne serait pas libre). Donc $\boxed{\text{E ne vérifie pas } (\star).}$

11.5. Comme aucun espace de dimension deux ne vérifie $(\star)$, $p \geqslant 2$ est impossible, dans le cas contraire d'après la première partie, il existerait un espace de dimension deux vérifiant $(\star)$. Ainsi $\boxed{p = 1.}$

Partie IV— Cans $n = 4$.

12 — Après calculs :

$$I^2 = I, \quad J^2 = -I, \quad K^2 = -I, \quad L^2 = -I,$$
$$JK = L, \quad KJ = -L, \quad JL = -K, \quad LJ = K, \quad KL = J, \quad LK = -J.$$

13 — Un autre calcul donne $(aI + bJ + cK + dL)(aI - bJ - cK - dL)$ $\boxed{= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I}$.

14 — Par définition, si $A \in E$, alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tel que :

$$A = aI + bJ + cK + dL,$$

puisque A n'est pas nulle, on a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$. La question précédente nous permet d'exhiber l'inverse de A donné par

$A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(aI - bJ - cK - dL)$. La matrice A est donc non nulle et inversible, d'où E vérifie ($\star$).
Enfin, puisque (I, J, K, L) est libre (le vérifier), l'espace E est de dimension 4. Il existe donc un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_4(\mathbf{R})$, qui vérifie ($\star$). Mais par ailleurs $p \leqslant 4$, donc $\boxed{p = 4}$.