

# FILIERE BCPST

## Épreuve de mathématiques

Épreuve commune aux ENS de Cachan, Lyon, Paris et à l'ENPC

### Coefficients :

CACHAN : 4 (pour un total de 65)

LYON : 4 (pour un total de 60.5)

PARIS : 16 (pour un total de 142)

ENPC : 16 (pour un total de 80)

Membre du jury : Gaël RAOUL

Le sujet est inspiré par un problème d'échange de protéines entre cellules cancéreuses. Cette motivation biologique n'a cependant pas été mise en avant dans le sujet, qui apparaissait aux candidats comme une collection de quatre exercices presque indépendants. Les différentes parties étaient d'un niveau de difficulté équivalent. Chaque partie comportait des questions faciles, qui ont permis aux candidats de montrer leur compréhension des méthodes et des résultats appris en cours. Obtenir une bonne note nécessitait cependant de répondre aux questions plus difficiles, pour lesquelles il était nécessaire de développer des méthodes mathématiques originales. Les candidats dont la note dépasse la moyenne ont généralement su répondre à la majorité des questions (échouant cependant souvent à répondre aux questions les plus difficiles).

Commentaire détaillé du sujet:

### 1. Fonctions gaussiennes

Pour la question 1.1, de nombreux candidats ont correctement démontré que la fonction  $f$  était bornée, mais ont en revanche omis de montrer que la Gaussienne  $\Gamma_{\sigma^2}$  est minorée par une constante positive *sur le support de  $f$* . Une méthode élégante pour répondre à cette question consiste à considérer le quotient  $\frac{f}{\Gamma_{\sigma^2}}$ .

Pour répondre à la question 1.3, on pouvait considérer le quotient  $|x|^k \Gamma_{\sigma_1^2}(x) / \Gamma_{\sigma_2^2}(x)$ , et utiliser le résultat de la question 1.2. Cette question n'a été correctement traitée que par un tiers des candidats environ.

La question 1.2 n'a pas posé de problème aux candidats, tandis que les questions 1.4 et 1.5 étaient des questions de cours (on pouvait utiliser la question 1.3 pour montrer la convergence des intégrales).

### 2. Dynamique d'un système d'équations différentielles.

Les questions 2.1 et 2.3 ont permis de tester les capacités de calcul des candidats, et ont souvent été correctement traitées, tout comme les questions 2.2 et 2.5, où il s'agissait de trouver des solutions exactes d'équations différentielles.

La question 2.4, en revanche, n'a été traitée correctement que dans les meilleures copies. Pour répondre à cette question, il fallait utiliser des développements limités.

Pour répondre à la question 2.6, il fallait remarquer que les solutions de l'équation différentielle  $N'(t) = a(t)N(t)$  vérifient  $N(t) = N(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$ . Les réponses correctes à cette question ont été peu nombreuses.

La question 2.7 comprenait d'une part le calcul explicite de  $\gamma^*$ , qui a souvent été bien fait, et d'autre part une analyse du comportement en temps long de  $N$ . Malheureusement, dans de nombreuses copies, la deuxième partie de la question a été faite trop rapidement : il fallait bien sûr utiliser le résultat de la question 2.6, mais on attendait une preuve, et en particulier que le choix du  $\varepsilon > 0$  soit précisé.

### 3. Dérivation et intégration

Dans la question 3.1, nous indiquions qu'il était possible d'utiliser la formule des accroissement finis. L'écriture correcte de cet énoncé a été récompensée. Par delà cet énoncé, une réponse correcte supposait d'appliquer la formule des accroissements finis à deux reprises : à  $f$ , et à  $\frac{\partial f}{\partial t}$ . Pour répondre à la question 3.3, il fallait à nouveau utiliser la formule des accroissement finis, ce qui n'a été fait que par une minorité de candidats.

La question 3.5 était difficile, puisqu'elle faisait intervenir l'inégalité de Tchebychev, connue des élèves dans le cadre des probabilités. La question suivante, 3.6, reposait sur le choix de  $R := |h|^{\frac{1}{3}}$ , et était également ardue. Répondre correctement à ces deux questions était souvent le signe d'une très bonne copie.

La question 3.7 n'était pas difficile, mais elle exigeait du candidat un peu de recul sur les calculs effectués dans cette partie du sujet.

Les questions 3.2 et 3.4 ont posé peu de difficultés.

### 4. Étude d'une équation intégral-différentielle

Cette partie n'a été abordée que par une minorité de candidats. Elle n'était cependant pas plus difficile que les parties précédentes.

Pour répondre à la question 4.1, il fallait utiliser un changement de variable dans l'intégrale, ainsi que la formule  $\Gamma_{\sigma_1^2} * \Gamma_{\sigma_2^2} = \Gamma_{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ , qui était rappelée en début de sujet.

Les questions 4.2 à 4.6 faisaient intervenir du calcul intégral, où il était nécessaire de justifier correctement chaque étape de calcul.