D.S. de Mathématiques # 6
Le Mercredi 13/03/2019. Durée : 2 heures.

Lycée Chaptal
BCPST2 A

Consignes

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

Bonne chance !

Exercice 1 **Mutation dans un brin d'ADN** L'ADN est soumis à des mutations endogènes et exogènes. Pour survivre, les cellules disposent d'un mécanisme de réparation, mais parfois la mutation se fixe et se transmet aux cellules filles. On suppose que le nombre de mutation M subi par l'ADN suit une loi de Poisson de paramètre λ et on note p la probabilité qu'une mutation soit fixée.

- **1—** Quelle est la loi du nombre de mutations fixées F, sachant que $M = k$?

python Proposer une fonction Python permettant de la simuler.

- **2—** Déterminer la loi du couple (M, F) ?
- **3—** Déterminer la loi de F, son espérance et sa variance.
- **4—** Quelle est la loi de M sachant que $F = n$?

SOLUTION de l'Exercice 1.

1— On est dans un cadre classique de binomiale : le nombre d'expériences étant k (le nombre de cellules étudié), un succès étant la fixation de la mutation de la cellule considérée, de probabilité p, les fixations pouvant être considérées comme indépendantes. La loi cherchée est donc une $\mathcal{B}(k, p)$.

Code | *Simulation de la loi de Bernoulli et de la binomiale*

```python
rech_dicho(L,1,5,6)
rech_dicho(L,0,5,1)

import matplotlib.pyplot as plt
def p(n):
    p=0.5
    for k in range(n):
        p=p-p**2/2
    return p
plt.plot([p(k) for k in range(11)],'bo')
plt.title("Suite p")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("p")
```

La fonction déjà existante du module `numpy` fait le même travail :

```python
plt.show()
```

2— Le support de (M, F) est $\boxed{\mathcal{S} = \{(i, j),\ j \leqslant i, i \geqslant 0\}}$.

De plus, pour $(i, j) \in \mathcal{S}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M = i, F = j) &= \mathbf{P}(F = j \mid M = i)\mathbf{P}(M = i)\\ &= \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}.\end{aligned}$$

□ **3—** Ainsi, le support de F est $\mathbf{N}$, et pour $j \in \mathbf{N}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(F=j) &= \sum_{i=j}^{\infty} \mathbf{P}(F=j, M=i) = \sum_{i=j}^{\infty} \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j \sum_{i=j}^{\infty} \binom{i}{j} \frac{((1-p)\lambda)^i}{i!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{j!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{(i-j)!} ((1-p)\lambda)^i \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{j!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} ((1-p)\lambda)^{i+j}.\end{aligned}$$

On déduit, à l'aide de l'expression de la série exponentielle, que :

$$\mathbf{P}(F=j) = \frac{e^{-\lambda}}{j!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j ((1-p)\lambda)^j e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!}.$$

En conclusion, $\boxed{F \hookrightarrow \mathcal{P}(p\lambda)}$. On déduit du cours que : $\boxed{\mathbf{E}(F) = p\lambda \text{ et } \mathbf{Var}(F) = p\lambda}$.

□ **4—** Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\mathbf{P}(M=i \mid F=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > i, \\ \dfrac{\mathbf{P}(M=i, F=n)}{\mathbf{P}(F=n)} = \dfrac{\binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}}{e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^n}{n!}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas $n \leqslant i$, on peut simplifier la fraction :

$$\boxed{\mathbf{P}(M=i \mid F=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > i, \\ \dfrac{e^{-(1-p)\lambda} (\lambda(1-p))^{i-n}}{(i-n)!} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

On reconnaît quasiment une loi de Poisson de paramètre $(1-p)\lambda$, mais dont le support est « décalé de n ».

. . . .

Problème 1 L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre et uniformément corrélées. Tous les objets aléatoires seront supposés définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Partie 1. Calculs préliminaires.

□ **1—** Soient X, Y deux variable aléatoire discrète ou à densité admettant un moment d'ordre deux. Rappeler l'expression du coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$. Dans quel ensemble prend-il ses valeurs ?

□ **2—** Soient X, Y, Z trois variable aléatoire discrète ou à densité admettant un moment d'ordre deux. Montrer que :

$$\mathbf{Var}(X+Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y),$$

puis exprimer de manière similaire $\mathbf{Var}(X+Y+Z)$.

□ **3—** Proposer une généralisation de cette dernière formule pour une somme de n variables aléatoires admettant un moment d'ordre deux.

Partie 2. Cas particulier de la loi de bernoulli.

Soient $p \in]0, 1[$ et $r \in [-1, 1]$. On suppose l'existence d'une suite $X_1, \dots, X_n$ de n variables aléatoires de loi $\mathcal{B}(p)$, et telles que :

$$\forall (k, \ell) \in [\![1 ; n]\!]^2, \quad \rho(X_k, X_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = \ell, \\ r & \text{si} \quad k \neq \ell. \end{cases}$$

On notera ensuite $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la somme partielle associée.

□ **4—** Donner, en fonction de n et p, $\mathbf{E}(X_k)$ pour tout k, ainsi que $\mathbf{E}(S_n)$.

□ **5—** Donner, en fonction de p et r, $\mathbf{Var}(X_k)$ pour tout k, ainsi que $\mathbf{Cov}(X_k, X_\ell)$ pour tout $1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n$.

□ **6—** Montrer que pour tout $1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n$, la variable aléatoire $X_k X_\ell$ est une variable aléatoire de Bernoulli, préciser le paramètre.

□ **7—** ***(Cas particuliers)*** Préciser, dans chacun des sous-cas ci-dessous la valeur de r, la loi de S_n et $\mathbf{Var}(S_n)$, si :

❶ les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes,

❷ les variables $X_1, \dots, X_n$ sont toutes égales.

On revient désormais au cas général.

□ **8—** Montrer, en utilisant la partie précédente, que : $\mathbf{Var}(S_n) = np(1-p)(1+(n-1)r)$. En déduire que : $r \geqslant -\dfrac{1}{n-1}$.

□ **9—** On suppose dans cette question que $n \geqslant 3$ et que : $\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right) = \mathbf{P}(S_n = 1) = 1.$

- **9.1.** Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.
- **9.2.** Déterminer les n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels $\mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \neq 0$, et la calculer.

Partie 3. Loi bêta-biomiale et bêta-continue.

□ **10—** Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

■ **10.1.** Justifier que $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

■ **10.2.** Montrer, à l'aide d'un changement de variable affine, que les deux intégrales ci-dessous sont de même nature et égales en cas de convergence :

$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^{1} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

■ **10.3.** En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$, $y > 0$.

Dans toute la suite on pose pour

$$(x, y) \in (\mathbf{R}^{+\star})^2, \quad \mathbf{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

On appelle cette fonction la *fonction Bêta*. Dans la suite, nous noterons également pour $z \in \mathbf{R}$ et $m \in \mathbf{N}$:

$$[z]^m = (z+m-1)(z+m-2)\cdots z,$$

*i.e.*l'unique suite $\left([z]^m\right)_m$ définie par : $[z]^0 = 1$, $\forall m \in \mathbf{N}$, $[z]^{m+1} = (z+m)\,[z]^m$. On admet que pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $(x, y) \in]0, \infty[^2$:

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{[x]^k\,[y]^{n-k}}{[x+y]^n} = 1.$$

□ **11—** Que vaut $[1]^m$ pour tout entier $m \in \mathbf{N}$? Calculer $[2]^m$ pour $m \in \mathbf{N}$.

□ **12—** ***(Loi bêta-binômiale — discrète)*** Soient a, b des nombres réels strictement positifs.

■ **12.1.** Justifier l'existence d'une variable aléatoire S discrète de support $\mathrm{S}(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!], \quad \mathbf{P}(\mathrm{S} = k) = \binom{n}{k} \frac{[a]^k\,[b]^{n-k}}{[a+b]^n}.$$

On notera $\mathrm{S} \hookrightarrow \mathbf{BB}(n, a, b)$, et on dira que S suit une *loi bêta-biomiale de paramètres* n, a, b.

■ **12.2.** Quelle est la loi $\mathbf{BB}(n, 1, 1)$?

■ **12.3.** Soit $\mathrm{S}_n \hookrightarrow \mathbf{BB}(n, a, b)$.

(i) Montrer que S_n admet une espérance, et que $s_n = \mathbf{E}(\mathrm{S}_n)$ satisfait la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 1, \quad s_n = \frac{n}{a+b+n-1}(a + s_{n-1}).$$

(ii) En déduire que : $\mathbf{E}(\mathrm{S}_n) = \dfrac{na}{a+b}$.

□ **13—** ***(Quelques propriétés de la fonction B)*** Soient $x, y \in \mathbf{R}^{+\star}$.

■ **13.1.** Montrer que $\mathbf{B}(x, y) = \mathbf{B}(y, x)$.

■ **13.2.** Montrer que : $\mathbf{B}(x, y) = \mathbf{B}(x+1, y) + \mathbf{B}(x, y+1)$.

■ **13.3.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $y\mathbf{B}(x+1, y) = x\mathbf{B}(x, y+1)$.

■ **13.4.** En déduire : $\mathbf{B}(x, y+1) = \dfrac{y}{x+y}\mathbf{B}(x, y)$, $\mathbf{B}(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}\mathbf{B}(x, y)$.

□ **14—** ***(Loi bêta — continue)*** Notons, pour $\alpha, \beta > 0$,

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathbf{B}(\alpha, \beta)} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Justifier que la fonction $f_{\alpha,\beta}$ est une densité de probabilité.

Partie 4. Étude du cas $n = 2$.

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, et X_1, X_2 deux variables aléatoires telles que (X_1, X_2) ait pour loi conjointe :

$$\forall (x_1, x_2) \in \{0,1\}^2, \quad \mathbf{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{\mathbf{B}(a + x_1 + x_2, b + 2 - x_1 - x_2)}{\mathbf{B}(a,b)}.$$

□ **15—** Justifier l'existence de (X_1, X_2) de loi conjointe la probabilité précédente.

SOLUTION

□ **1—** D'après le cours, $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ où σ_X, σ_Y sont les écart-types de X et de Y. Ce coefficient est un nombre réel de $[-1, 1]$.

□ **2—** Par définition de la covariance, nous avons

$$\mathbf{Var}(X+Y) = \mathbf{Cov}(X+Y, X+Y) = \mathbf{Cov}(X,X) + \mathbf{Cov}(X,Y) + \mathbf{Cov}(Y,X) + \mathbf{Cov}(Y,Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)$$

par bilinéarité et symétrie de la covariance. On recommence pour la seconde formule, en réutilisant la première fraichement établie :

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(X+Y+Z) &= \mathbf{Var}(X+Y) + \mathbf{Var}(Z) + 2\mathbf{Cov}(X+Y, Z)\\ &= (\mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)) + \mathbf{Var}(Z) + 2\mathbf{Cov}(X,Z) + 2\mathbf{Cov}(Y,Z)\\ &= \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + \mathbf{Var}(Z) + 2\mathbf{Cov}(X,Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Z) + 2\mathbf{Cov}(Y,Z).\end{aligned}$$

D'où la formule : $\boxed{\mathbf{Var}(X+Y+Z) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + \mathbf{Var}(Z) + 2\mathbf{Cov}(X,Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Z) + 2\mathbf{Cov}(Y,Z)}$.

□ **3—** Une généralisation de cette formule a été vue en cours, elle se démontre de la même manière que les deux cas particuliers précédents, en utilisant le lien variance/covariance.

$$\mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Var}(X_i) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j),$$

pour une famille $X_1, \cdots, X_n$ de variables aléatoires réelles admettant des moments d'ordre deux. On peut aussi l'écrire sous cette forme (dans ce cas certains termes apparaissent deux fois...) :

$$\mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Var}(X_i) + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j).$$

□ **4—** D'après le cours, $\mathbf{E}(X_k) = p$ et par linéarité de l'espérance : $\mathbf{E}(S_n) = np$.

Attention

S_n ne suit pas une $\mathcal{B}(n,p)$ même si elles ont même espérance ! (il n'y a aucune hypothèse d'indépendance dans l'énoncé).

□ **5—** On a $\mathbf{Var}(X_k) = p(1-p)$ pour tout entier k d'après le cours. Par ailleurs, $\mathbf{Cov}(X_k, X_\ell) = \rho(X_k, X_\ell) \times \sqrt{\mathbf{Var}(X_k)}\sqrt{\mathbf{Var}(X_\ell)} = \rho(X_k, X_\ell) \times \mathbf{Var}(X_k)$ puisque X_k et X_ℓ ont même loi. Donc :

$$\boxed{\mathbf{Cov}(X_k, X_\ell) = \begin{cases} p(1-p) & \text{si} \quad k = \ell, \\ rp(1-p) & \text{si} \quad k \neq \ell. \end{cases}}$$

□ **6—** Soient $1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n$. Alors le support de $X_k X_\ell$ est $\boxed{\{0,1\}}$ puisque X_k et X_ℓ sont de support $\{0,1\}$ également. Ainsi, la loi de $X_k X_\ell$ est forcément une loi de bernoulli puisqu'il existe $p' \in]0,1[$ tel que : $\mathbf{P}(X_k X_\ell = 0) = p' = 1 - \mathbf{P}(X_k X_\ell = 1)$. Pour trouver p' il suffit de calculer son espérance :

$$p' = \mathbf{E}(X_k X_\ell) = \mathbf{Cov}(X_k, X_\ell) + \mathbf{E}(X_k)\mathbf{E}(X_\ell) = \boxed{rp(1-p) + p^2}.$$

□ **7—**

❶ S'il y a indépendance, alors $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$, donc $\boxed{\mathbf{Var}(S_n) = np(1-p)}$. Par ailleurs, l'indépendance impliquant la non-corrélation, nous avons : $r = 0$.

❷ Dans ce cas, d'après les propriétés de la variance, nous avons : $\mathbf{Var}(S_n) = n^2 \mathbf{Var}(S_1) = \boxed{n^2 p(1-p)}$. Si $k \neq \ell$, alors $\rho(X_k, X_\ell) = 1$ puisque le numérateur du coefficient de corrélation est alors égal au dénominateur. Précisions la loi de S_n. Son support est $\boxed{[\![0\,;\, n]\!]}$ donc :

$$\mathbf{P}(S_n = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - p, \quad \mathbf{P}(S_n = n) = 1 - (1-p) = p.$$

□ **8—** Revenons ici au cas général. D'après la formule de la variance d'une somme rappelée en introduction, nous avons

$$\mathbf{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Var}(X_i) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n p(1-p) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} rp(1-p) = np(1-p) + 2rp(1-p)\frac{n(n-1)}{2} = \boxed{np(1-p)(1 + (n-1)r)}.$$

Comme une variance est positive, on déduit la borne demandée sur le coefficient de corrélation : $\boxed{r \geqslant -\dfrac{1}{n-1}}$.

□ **9—**

■ **9.1.** On a d'une part $\mathbf{E}(S_n) = n\mathbf{E}(X_1) = np$ et d'autre part, puisque $\mathbf{P}(S_n = 1) = 1$ par hypothèse, nous avons : $\mathbf{E}(S_n) = 1\mathbf{P}(S_n = 1)$ donc $\boxed{p = \dfrac{1}{n}}$, or $\mathbf{Var}(S_n) = \mathbf{E}\left(1^2\right) - \mathbf{E}(1)^2 = 0$ donc $\boxed{r = -\dfrac{1}{n-1}}$ en utilisant l'expression de la variance trouvée précédemment.

■ **9.2.** Comme S_n est presque-sûrement égale à un par hypothèse, $\mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \neq 0$ si et seulement si un des x_i exactement vaut un et les autres sont nuls. Mais :
$$\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, \dots, X_n = 0) \leqslant \mathbf{P}(X_1 = 1) = p = \frac{1}{n}.$$
De-même pour les autres n-uplets. Or, la somme de ces n probabilités vaut un d'après la formule des probabilités totales, donc chacune d'entre elles vaut $1/n$.

□ **10—**

■ **10.1.** L'intégrale est parfaitement définie, en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment dès que $x - 1 \geqslant 0$, puisque $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est alors une fonction continue sur $[0, 1/2]$. Il reste à investiguer le cas $x < 1$.

❶ Supposons que $x > 0$. Alors $t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$. Donc pour t assez proche de zéro, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leqslant \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{1-x}}$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge (faire le calcul explicite), et que les fonctions sont positives, découle alors la convergence de l'intégrale.

❷ Supposons que $x \leqslant 0$. Alors $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$, mais comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ diverge pour $x \leqslant 0$ (calcul explicite), et que d'après l'équivalent précédent, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \geqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t^{1-x}}$ pour t assez proche de zéro, on en déduit la divergence de l'intégrale par théorème de comparaison.

Conclusion : $\boxed{\text{l'intégrale converge si et seulement si } x > 0.}$

■ **10.2.** Il suffit de poser $u = 1 - t$, c'est un changement de variable affine donc licite. D'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales sont de même nature et égales en cas de convergence.

■ **10.3.** Donc $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si (définition de l'intégrale)
$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{convergent.}$$
On obtient, comme condition équivalente à l'aide des fonctions précédentes :
$$\boxed{x > 0 \quad \text{et} \quad y > 0}.$$

□ **11—** Un calcul direct montre que $[1]^m = m!$ et $[2]^m = (m+1)!$.

□ **12—**

■ **12.1.** Comme a, b sont positifs, les $\mathbf{P}(S = k)$ pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ sont positifs aussi, et de somme un d'après la formule $(\star)$. Ainsi, d'après le cours, $\boxed{\text{il existe une variable aléatoire de loi bêta-binomiale.}}$

■ **12.2.** Si $a = b = 1$, alors comme $[a]^k = [b]^k = k!$ et $[a+b]^k = [2]^k = (k+1)!$, donc en simplifiant on trouve :
$$\mathbf{P}(S = k) = \frac{1}{n+1}.$$
Donc $\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0\,;\, n]\!])}$, la loi uniforme sur $[\![0\,;\, n]\!]$.

■ **12.3. (i)**. La variable aléatoire S_n admet une espérance puisqu'elle est de support fini. On calcule ensuite :
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\frac{[a]^k\,[b]^{n-k}}{[a+b]^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{[a]^k\,[b]^{n-k}}{[a+b]^n}$$
que l'on peut encore réecrire :
$$s_n = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{[a]^k\,[b]^{n-k}}{[a+b]^n}$$
Pour calculer cette somme, nous allons essayer de faire intervenir la formule $(\star)$.
$$s_n = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{(a+k-1)}{(a+b+n-1)}\,\frac{[a]^{k-1}\,[b]^{n-k}}{[a+b]^{n-1}}.$$
D'où en faisant le changement $k \leftarrow k-1$, nous obtenons :
$$\begin{aligned} s_n &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(a+k)}{(a+b+n-1)}\,\frac{[a]^k\,[b]^{n-(k+1)}}{[a+b]^{n-1}} = \frac{n}{a+b+n-1}\left(a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{[a]^k\,[b]^{n-(k+1)}}{[a+b]^{n-1}} + \sum_{k=0}^{n-1}k\binom{n-1}{k}\frac{[a]^k\,[b]^{n-(k+1)}}{[a+b]^{n-1}}\right) \\ &= \boxed{\frac{n}{a+b+n-1}a \times 1 + s_{n-1}}, \end{aligned}$$
où à la dernière étape nous avons reconnu s_{n-1} dans le second terme, et utilisé $(\star)$ pour le premier.
(ii). Faire une récurrence sur n.

□ **13—**

■ **13.1.** Changement de variable affine $u = 1 - t$.

■ **13.2.** Sommer les deux intégrales du membre de droite, utiliser la linéarité, et factoriser par $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ à l'intérieur de l'intégrale.

■ **13.3.** Nous avons $y\mathbf{B}(x+1, y) = \displaystyle\int_0^1 t^x y(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$, on a envie de faire une intégration par parties en primitivant le second terme du produit. L'intégrale étant généralisée en 0 et 1 éventuellement on raisonne avec des intégrales partielles. Considérons $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Les fonctions $u : t \longmapsto -(1-t)^y$ et $v(t) : t \longmapsto t^x$ étant de classe C^1, nous obtenons :
$$\int_\varepsilon^A t^x y(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = -\int_\varepsilon^A x t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t + [-(1-t)^y t^x]_\varepsilon^A.$$

On fait tendre A vers 1, puis ε vers zéro, le crochet tend alors vers zéro, et nous obtenons :

$$\boxed{y\mathbf{B}(x+1,y) = x\mathbf{B}(x,y+1)}.$$

■ **13.4.** C'est une simple combinaison des deux questions précédentes.
$\mathbf{B}(x,y+1) = \dfrac{y}{x}\mathbf{B}(x+1,y) = \dfrac{y}{x}(\mathbf{B}(x,y) - \mathbf{B}(x,y+1)) = \dfrac{y}{x}(\mathbf{B}(x,y) - y/(x+y)\mathbf{B}(x,y))$ d'où la formule annoncée. De la même manière on obtient la seconde.

□ **14**— La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est positive continue sur $[0,1]$, car $\mathbf{B}(\alpha,\beta)$ est une quantité positive. La fonction est continue sauf éventuellement en zéro et un, et d'intégrale un sur $[0,1]$ par définition de la fonction $\mathbf{B}$: $\displaystyle\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathbf{B}(\alpha,\beta)}\mathbf{B}(\alpha,\beta) = 1$. Conclusion : $\boxed{f_{\alpha,\beta} \text{ est une densité de probabilité.}}$

□ **15**— Les quantités $\dfrac{\mathbf{B}(a+x_1+x_2, b+2-x_1-x_2)}{\mathbf{B}(a,b)}$ sont positives pour tout couple $(x_1,x_2) \in \{0,1\}^2$ et $a,b>0$. Il suffit donc de calculer

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_1=0,X_2=0) + \mathbf{P}(X_1=1,X_2=0) + \mathbf{P}(X_1=0,X_2=1) + \mathbf{P}(X_1=1,X_2=1)\\
&= \frac{\mathbf{B}(a,b+2)}{\mathbf{B}(a,b)} + \frac{\mathbf{B}(a+1,b+1)}{\mathbf{B}(a,b)} + \frac{\mathbf{B}(a+1,b+1)}{\mathbf{B}(a,b)} + \frac{\mathbf{B}(a+2,b)}{\mathbf{B}(a,b)}\\
&= \frac{\mathbf{B}(a,b+1) + \mathbf{B}(a+1,b)}{\mathbf{B}(a,b)}\\
&= \frac{\mathbf{B}(a,b)}{\mathbf{B}(a,b)} = 1
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la question **13.2** deux fois. Ainsi, $\boxed{\text{le couple aléatoire } (X_1,X_2) \text{ donné par l'énoncé existe bien.}}$

....