Sommaire

1 Préparation aux Écrits **2**

1 Algèbre & Géométrie 2

1.1 Réduction effective de matrices 2

1.2 Problème Agro-Véto 2016 : calcul matriciel 3

1.3 Géométrie 5

1.4 Problème G2E 2017 : équations différentielles, espaces euclidiens, géométrie, réduction . . 6

1.5 Problème Agro-Véto 2015. Épreuve B. Algèbre linéaire numérique. 8

2 Révisions d'Analyse 9

2.1 Rolle et accroissements finis 9

2.2 Convergences de séries/intégrales 11

2.3 Fonctions de plusieurs variables 12

2.4 Complément — exemple de résolution d'un système différentiel 13

3 Révisions de Probabilités & Statistiques 14

3.1 Problème — G2E 2017. Probabilités discrètes. 14

3.2 Problème — EML 2017 VOIE E 15

3.3 Variables aléatoires À densité 16

3.4 Problème Agro-Véto 2018 & Complément — chaînes de Markov sur un espace d'états fini . 17

4 Solutions 21

2 Préparation aux Oraux **38**

1 Banque Agro & Véto — Mathématiques & Informatique 38

1.1 Notes sur le fonctionnement de Geogebra 38

1.2 Algèbre & Géométrie 40

1.3 Analyse 44

1.4 Probabilités & Statistiques 48

1.5 Solutions 54

2 Banque G2E — Mathématiques 54

2.1 Algèbre & Géométrie 54

2.2 Analyse 55

2.3 Probabilités & Statistiques 55

2.4 Solutions 57

3 Banque G2E — Informatique 57

3.1 Solutions 58

CHAPITRE 1

Préparation aux Écrits

Résumé/Plan

L'objectif est ici de regarder des exercices et des portions de sujets de concours.
Les encadrés « À revoir » sont les prérequis nécessaires pour aborder chaque exercice/problème **de ce polycopié**, mais bien sûr ce ne sont pas les seuls !

1 Algèbre & Géométrie . . . **2**
1.1 Réduction effective de matrices . . . 2
1.2 Problème Agro-Véto 2016 : calcul matriciel . . . 3
1.3 Géométrie . . . 5
1.4 Problème G2E 2017 : équations différentielles, espaces euclidiens, géométrie, réduction . . . 6
1.5 Problème Agro-Véto 2015. Épreuve B. Algèbre linéaire numérique. . . . 8
2 Révisions d'Analyse . . . **9**
2.1 Rolle et accroissements finis . . . 9
2.2 Convergences de séries/intégrales . . . 11
2.3 Fonctions de plusieurs variables . . . 12
2.4 Complément — exemple de résolution d'un système différentiel . . . 13
3 Révisions de Probabilités & Statistiques . . . **14**
3.1 Problème — G2E 2017. Probabilités discrètes. . . . 14
3.2 Problème — EML 2017 VOIE E . . . 15
3.3 Variables aléatoires À densité . . . 16
3.4 Problème Agro-Véto 2018 & Complément — chaînes de Markov sur un espace d'états fini . . . 17
4 Solutions . . . **21**

Le travail est l'activité vitale propre au travailleur, l'expression personnelle de sa vie.

Emmanuel Kant

1 Algèbre & Géométrie

1.1 Réduction effective de matrices

À revoir

Algorithme du pivot de Gauß. Revoir notamment les deux opérations qu'il est judicieux d'effectuer en premier.

[Solution 1] **Exercice 1** On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? Sur $\mathbf{C}$? Si oui, la diagonaliser.

[Solution 2] **Exercice 2** On considère $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? Sur $\mathbf{C}$? Si oui, la diagonaliser.

[Solution 3] **Exercice 3** Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n,p)$. Soit M la matrice aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) \end{pmatrix}.$$

1 — Quelle est la probabilité que M soit inversible ? nilpotente (on admettra que cela est équivalent à $M^2 = 0$) ? vérifie $M^2 = M$?

2 — Donner la loi, l'espérance et la variance du nombre de valeurs propres de M. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

3 — Donner la loi de la plus grande des valeurs propres.

À revoir

Théorème spectral. Comment obtenir une base orthonormée de vecteurs propres. *Le théorème spectral précise que : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, dans une base orthonormée, et est À valeurs propres réelles.*
Comment obtenir une telle base en pratique ?
On commence par diagonaliser de manière classique la matrice considérée. Enfin, on vérifie que les vecteurs obtenus sont orthonormés.

1. *Si nous avons obtenu trois valeurs propres distinctes : les vecteurs propres obtenus seront toujours orthogonaux (point crucial dans la preuve du théorème spectral que nous avons admis), il suffira donc de normer chacun des vecteurs.*
2. *Si nous avons obtenu deux valeurs propres distinctes, un des deux espaces propres est de dimension deux, l'autre de dimension un. On sera toujours dans le cas suivant : le vecteur propre dans l'espace de dimension un sera orthogonal aux deux autres. On orthonormalise donc l'espace de dimension deux.*

[Solution 4] **Exercice 4** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

1 — La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui la diagonaliser.

2 — Que remarque-t-on sur la base de vecteurs propres ?

[Solution 5] **Exercice 5** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice P inversible telle que ${}^{\mathsf{T}}PAP$ soit diagonale.

1.2 Problème Agro-Véto 2016 : calcul matriciel

À revoir

❶ Rappeler la définition de la matrice associée À une application linéaire.

❷ Préciser ce que signifie la phrase : « on note f l'endomorphisme canoniquement associé À A »— notations évidentes.

■ **Problème 1** Dans ce problème, n désigne un élément de $\mathbf{N}^\star$.

Partie I— Définitions et premières propriétés.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Elle est dite *pseudo-inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\begin{cases} AB &= BA \\ ABA &= A \\ BAB &= B \end{cases} . \tag{1.1}$$

On dit alors que B est une *pseudo-inverse* de A.

1 — *(Étude de l'unicité)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pseudo-inversible, on suppose l'existence de B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.

1.1. En calculant AB_1AB_2 de deux façons, montrer que $AB_2 = AB_1$.

1.2. En déduire que $B_1 = B_2$. Ainsi la matrice A admet un unique pseudo-inverse appelé *la* pseudo inverse de A et notée $A^\star$.

2 — *(Quelques exemples)*

2.1. Montrer que la matrice nulle d'ordre n est pseudo-inversible. Déterminer sa pseudo-inverse.

2.2. Montrer que toute matrice inversible M est pseudo-inversible. Déterminer sa pseudo-inverse.

2.3. Soit N nilpotente pseudo-inversible, *i.e.*il existe p non nul tel que $N^p = 0$, et $N^{p-1} \neq 0$.

- **2.3.1.** Montrer que : $\forall k \geqslant 2, \quad N^\star N^k = N^{k-1}$.
- **2.3.2.** En déduire que N est nulle, *i.e.*que $p = 1$.
- **2.3.3.** Que peut-on en déduire concernant $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3 — *(Cas d'une matrice diagonalisable)*

3.1. Montrer que toute matrice diagonale d'ordre n À coefficients réels est pseudo-inversible et préciser sa pseudo-inverse. Est-ce vraie pour l'inversibilité classique ?

3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pseudo-inversible et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inversible. Montrer que $A' = P^{-1}AP$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse en fonction de P et $A^\star$.

3.3. En déduire que toute matrice diagonalisable est pseudo-inversible.

3.4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- **3.4.1.** Déterminer les valeurs propres de A, ainsi que les espaces propres.
- **3.4.2.** La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.
- **3.4.3.** En déduire que A est pseudo-inversible.
- **3.4.4.** Déterminer la pseudo-inverse de A.

Partie II— Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On munit $\mathbf{R}^n$ de la base canonique $\mathcal{B}$ et on introduit l'endomorphisme canoniquement associé À

A, *i.e.*l'endomorphisme a de $\mathbf{R}^n$ tel que $A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}}{\mathcal{M}\mathrm{at}}(a)$. Le but de cette partie est d'établir l'équivalence ci-dessous :

$$A \quad \text{pseudo-inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Im} a = \{0\}.$$

4 — Dans cette question on suppose que A est pseudo-inversible et on introduit l'endomorphisme $a^\star$ tel que $A^\star = \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}}{\mathcal{M}\mathrm{at}}(a^\star)$, de sorte que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a \circ a^\star & = & a^\star \circ a \\ a \circ a^\star \circ a & = & a \\ a \circ a^\star \circ a & = & a^\star \end{array}\right. . \tag{1.2}$$

4.1. Prouver que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^\star \circ a \circ a & = & a \\ a \circ a \circ a^\star & = & a \end{array}\right. . \tag{1.3}$$

4.2. Montrer que $\operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Im} a = \{0\}$.

4.3. En déduire que pour tout vecteur $z \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique couple de vecteurs $(x, y) \in \operatorname{Ker} a \times \operatorname{Im} a$ tel que $z = x + y$.

5 — Dans cette question on suppose que $\operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Im} a = \{0\}$. On définit l'application $a_0 : \operatorname{Im} a \to \operatorname{Im} a$, $x \longmapsto a(x)$ et on admet qu'elle est linéaire.

5.1. Montrer que a_0 est un automorphisme de $\operatorname{Im} a$.

5.2. On considère une base $(e_1, \dots, e_s)$ de $\operatorname{Ker} a$ et $(f_1, \dots, f_r)$ une base de $\operatorname{Im} a$ où $r = \operatorname{Rg} a$.

- **5.2.1.** Donner une relation entre r, s, n.
- **5.2.2.** Montrer que $(e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\mathbf{R}^n$.
- **5.2.3.** En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} a \times \operatorname{Im} a$ tel que $x = x_1 + x_2$.

5.3. On définit l'application b de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on considère l'unique couple $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} a \times \operatorname{Im} a$ tel que $x = x_1 + x_2$ et on pose $b(x) = (a_0)^{-1}(x_2)$. Montrer que b est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

5.4. Montrer que : $\left\{\begin{array}{rcl} a \circ b & = & b \circ a \\ a \circ b \circ a & = & a \\ b \circ a \circ b & = & b \end{array}\right.$.

5.5. En déduire que A est pseudo-inversible.

6 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A est pseudo-inversible si et seulement si elle est semblable À une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 \quad \text{inversible.}$$

1.3 Géométrie

À revoir

La définition d'un vecteur À une partie de $\mathbf{R}^n$, cas particulier d'un vecteur À un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^n$ en fonction du projeté orthogonal.

[Solution 6] **Exercice 6** ***Cas*** $E = \mathbf{R}^2$ ***et*** $\mathbf{R}^3$ On s'intéresse ici à la notion de projection orthogonale sur une droite vectorielle de $E = \mathbf{R}^2$. On munit E de son produit scalaire euclidien $\langle .|. \rangle$.

1 — Dans $\mathbf{R}^2$, on considère la droite $(\mathcal{D})\quad ax + by + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$.

1.1. Soit $A \in \mathcal{D}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$, montrer que $\left\langle \overrightarrow{AM_0} \middle| \vec{n} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{H_0M_0} \middle| \vec{n} \right\rangle$.

1.2. En déduire que la distance de M_0 à D est $\quad d(M_0, D) = \dfrac{\left|\left\langle \overrightarrow{AM_0} \middle| \vec{n} \right\rangle\right|}{\|\vec{n}\|}$. Cette expression correspond-elle bien à la formule du cours ?

1.3. En déduire l'expression de la distance faisant intervenir l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

2 — Reprendre cette démarche dans l'espace pour trouver l'expression de la distance d'un point à un plan ; on se place donc dans $E = \mathbf{R}^3$ dans cette question, et on notera $(\mathcal{P})\quad ax + by + cz + d = 0$ l'équation du plan en question, avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$.

1.4 Problème G2E 2017 : équations différentielles, espaces euclidiens, géométrie, réduction

Problème 2 Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on munit $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire canonique. On rappelle que le spectre d'un endomorphisme est l'ensemble de ses valeurs propres. Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, on cherche À déterminer si f vérifie la propriété :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \left\langle x \middle| f(x) \right\rangle \geqslant 0. \tag{P}$$

Partie I— Premier exemple dans $\mathbf{R}^2$.

1 — Résoudre dans l'ensemble des fonction deux fois dérivables : $\quad y'' = \frac{2}{3}y' - \frac{1}{9}y$.

2 — Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, et φ la fonction définie par : $\quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \varphi(t) = (at + b)e^{t/3}$.

2.1. Démontrer que φ est C^∞ sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe deux suites (a_n), (b_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \varphi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)e^{t/3}.$$

2.2. Démontrer que (a_n) et (b_n) satisfont la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n, \quad b_{n+2} = \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n.$$

2.3. Déterminer (a_n) et (b_n) en fonction de n.

3 — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note X_n la matrice colonne de deux coefficients a_n et a_{n+1}.

3.1. Démontrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ tel que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_{n+1} = \frac{1}{9}AX_n$.
3.2. Notant f l'endomorphisme canonique associé À A, vérifie que $\operatorname{Spec} f \subset \mathbf{R}^+$.
3.3. Calculer $f(-2,1)$ puis déterminer si f vérifie (P).

Partie II— Une projection orthogonale dans $\mathbf{R}^3$.

On se place dans $\mathbf{R}^3$ et on considère la matrice A définie ci-dessous dont on note f l'endomorphisme canoniquement associé :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4 — 4.1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ (en donner une base) puis démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^3, \quad f(x) - x \in \operatorname{Ker} f.$$

4.2. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et justifier que $\operatorname{Im} f$ est un plan $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation cartésienne et un vecteur normal.
4.3. En déduire que f est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

5 — Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.
5.1. Calculer $d(x, \mathcal{P})$ et en déduire : $\frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
5.2. En déduire également que :

$$-4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \leqslant 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2.$$

5.3. Calculer $\langle x | f(x) \rangle$ et démontrer que f vérifie (P).

Partie III— Deux exemples dans $\mathbf{R}^n$.

Dans toute cette partie, $n \in \mathbf{N}^\star$, I désigne la matrice identité de taille $n \times n$, et pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note f l'endomorphisme canoniquement associé À A et $f^\star$ l'endomorphisme canoniquement associé À ${}^{\mathsf{T}}A$.

6 — *(Étude de l'endomorphisme dual)*
6.1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x | f(x) \rangle = \langle x | f^\star(x) \rangle$.
6.2. En déduire que f vérifie (P) si et seulement si $f + f^\star$ vérifie (P).
6.3. Justifier qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que ${}^{\mathsf{T}}Q = Q^{-1}$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $A + {}^{\mathsf{T}}A = QDQ^{-1}$.
6.4. En déduire que f vérifie (P) si et seulement si $\operatorname{Spec}(f + f^\star) \in \mathbf{R}^+$.

7 — Dorénavant, A et B désigne les deux matrices ci-dessous appartement À $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \dots & 1 & \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \dots\dots & 1 & \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.1. Démontrer que f canoniquement associé À A vérifie (P) si et seulement si g, l'endomorphisme canoniquement associé À B, vérifie (P).
7.2. Justifier que g n'est pas diagonalisable.
7.3. Calculer $\operatorname{Rg}(A - I)$ et en déduire que les valeurs propres de A sont 1 et $n+1$. Que peut-on en conclure ?

8 — *(Prenons les x_i aléatoires)* Soient $X_1, \dots, X_n$ une famille de n variables aléatoires indépendantes suivant la mème loi de Poisson de paramètre un.
8.1. Démontrer que la matrice A définie en question précédente est la matrice dont le coefficient en i-ième ligne et j-ème colonne vaut $\mathbf{E}(X_iX_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.
8.2. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$ que : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x | f(x) \rangle = \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_iX_i\right)^2\right)$.
8.3. Retrouver que f vérifie (P).

1.5 Problème Agro-Véto 2015. Épreuve B. Algèbre linéaire numérique.

Rappelons les principales commandes pour manipuler les matrices en Python.

```
>>> import numpy as np
>>> #Une matrice peut être crée comme une liste de listes
>>> A=np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
>>> B=np.array([[2,3,4],[5,6,7]])
>>> #que l'on convertit en un type manipulable par numpy nd.array
>>> #autre type possible pour les matrices 'matrix'
>>> type(A)
<type 'numpy.ndarray'>
>>> #on accède aux éléments comme on le ferait avec des listes de listes classiques
>>> A[1][2]
6
>>> #Mais on peut aussi utiliser une notation plus \og mathématique \fg et se passer des doubles croche
>>> A[1,2]
6
>>> #Taille d'une matrice
>>> A.shape
(2, 3)
>>> #Extraction : fonctionnement identique aux listes. Les : signifient que l'on impose aucune
>>> # condition sur la position où il est placé (ici, cela signifie \og peu importe la ligne \fg,
>>> # donc on renvoie une colonne)
>>> A[:,2]
array([3, 6])
>>> #Somme
>>> C=A+B
>>> C
array([[ 3,  5,  7],
       [ 9, 11, 13]])
>>> #Transposition
>>> C.transpose()
array([[ 3,  9],
       [ 5, 11],
       [ 7, 13]])
>>> #Produit
>>> np.dot(A,B.transpose())
array([[20, 38],
       [47, 92]])
>>> #Matrices basiques
>>> np.zeros([1,4])
array([[ 0.,  0.,  0.,  0.]])
>>> np.ones([2,1])
array([[ 1.],
       [ 1.]])
```

■ **Problème 3** On souhaite dans ce problème écrire un programme permettant de calculer, sous certaines conditions, un vecteur propre d'une matrice. Chaque programme devra être commenté par une phrase détaillant le raisonnement qui a conduit À son élaboration.
Notons $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$. Pour $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, on appelle norme de M la quantité $\|M\|$ définie par :

$$\|M\| = \max_{(i,j)\in[\![1\,,\,m]\!]\times[\![1\,,\,n]\!]} \left|m_{i,j}\right|.$$

1 — Quel est le signe de $\|M\|$? Quand avons-nous $\|M\| = 0$?

2 — python Àcrire une fonction `Norme(M)` qui étant donnée une matrice M de taille quelconque, calcule et renvoie $\|M\|$. *On ne devra pas utiliser de fonction déjÀ existante.*

3 — Àcrire une fonction `Normalise(v)` qui étant donnée $v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ non nulle renvoie $\widetilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$.

On se donne À présent une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$. Soit $v_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$. En supposons qu'aucun termes n'est dans $\operatorname{Ker} A$, on peut former une suite (v_n) À valeurs dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ définie par :

$$v_{n+1} = \frac{Av_n}{\|Av_n\|}.$$

4 — Àcrire une fonction `PuissanceIteree(A,n)` qui étant donnée une matrice carrée A et un entier n, détermine la taille p de A, choisit aléatoirement une matrice colonne $v_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$, puis calcule et renvoie, en supposant que tous les termes de la suite ci-dessus sont bien définis, la matrice colonne v_n.
On peut montrer que si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ est diagonalisable, et possède $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ comme valeurs propres avec

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_p|$$

alors la suite (v_n) ci-dessus existe et ses composantes convergent vers les composantes d'un vecteur propre v de A associé À la valeur propre λ_1 sauf pour quelques choix de v_0. On peut montrer que la probabilité, en choisissant aléatoirement v_0, de tomber sur l'une des exceptions est nulle.
On se propose d'écrire maintenant une fonction `VecteurPropre(A, e)` qui étant donnée une matrice carrée A satisfaisant les hypothèses précédentes et un nombre $e > 0$ calcule les termes de la suite (v_n) jusqu'À ce que deux termes successifs vérifient

$$\|v_{n+1} - v_n\| < e,$$

et renvoie alors la matrice colonne v_{n+1}. Voici trois propositions de programmes en supposant la déclaration *a priori* `from numpy import *`.

Programme A

```
def VecteurPropre(A, e):
    d=A.shape
    v = matrix(random.rand(d[0],1))
    v = Normalise(v)
    w = Normalise(A*v)
    while Norme(v - w) >= e:
        v = w
        w = Normalise(A*v)
    return w
```

Programme B

```
def VecteurPropre(A, e):
    d=A.shape
    v = matrix(random.rand(d[0],1))
    v = Normalise(v)
    w = Normalise(A*v)
    ecart = Norme(v - w)
    while ecart >= e:
        v = w
        w = Normalise(A*v)
    return w
```

Programme C

```
def VecteurPropre(A, e):
    d=A.shape
    v = matrix(random.rand(d[0],1))
    v = Normalise(v)
    while Norme(v - Normalise(A*v)) >
        v = Normalise(A*v)
    return Normalise(A*v)
```

5 — Parmi ces trois programmes, indiquer lesquel(s) vous semblent correct(s). Pour chaque programme incorrect on précisera clairement pourquoi en une phrase.

2 Révisions d'Analyse

2.1 Rolle et accroissements finis

À revoir

❶ Rappeler le théorème de Rolle.

❷ Rappeler l'inégalité des accroissements finis.

❸ Faire deux dessins pour expliquer ces inégalités.

[Solution 7] **Exercice 7** ***Règle de L'Hopital*** Soient $f : [0, a] \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : [0, a] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur $[0, a]$, dérivables sur $]0, a]$ telles que : $f(0) = g(0) = 0$. On suppose en outre que g et g' ne s'annulent pas sur $]0, a]$.

1 — Pour tout $x \in]0, a]$, appliquer le théorème de Rolle à $t \longmapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.

2 — En déduire que si : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi et qu'elles sont égales, on appelle cette propriété la *règle de L'Hopital*.

3 — Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin x - x}$.

À revoir

Rappeler des arguments clefs pour l'étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction réelle.

❶ Bonne définition de la suite : il suffit que

❷ Quand peut-on affirmer que la suite est croissante ? décroissante ?

❸ Quel argument utilise-t-on en général pour montrer la convergence vers une limite finie ?

❹ En admettant que la fonction f est continue, quelles peuvent être les limites finies possibles $\ell \in \mathbf{R}$?

[Solution 8] ■ **Exercice 8** ***En utilisant les rappels précédents*** Àtudier la suite $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2}$.

[Solution 9] ■ **Exercice 9** ***En utilisant l'inégalité des accroissements finis*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(u_n) = f(u_n)$ où $f = \cos$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

1 — Montrer qu'il existe $\ell \in [0,1]$ tel que $\ell = \frac{1}{2}\cos \ell$.

2 — Montrer que ℓ est l'unique point fixe de f.

3 — Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

4 — En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{|u_0-\ell|}{2^n}$.

5 — Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

2.2 Convergences de séries/intégrales

À revoir

Le théorème de comparaison pour les séries À termes positifs. Rappeler, avec un diagramme, le schéma de raisonnement pour étudier la nature d'une série :

Comment vérifier concrètement l'hypothèse principale du théorème de comparaison ?

[Solution 10] **Exercice 10** ***Séries*** Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

❶ $\sum \frac{n}{n^3+1}$,

❷ $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$,

❸ $\sum n\sin(1/n)$,

❹ $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

❺ $\sum \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$,

❻ $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

À revoir

Le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives. Rappeler, avec un diagramme, le schéma de raisonnement pour étudier la convergence d'une intégrale :

Comment vérifier concrètement l'hypothèse principale du théorème de comparaison ?

[Solution 11] **Exercice 11** ***Intégrales*** Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

❶ $\int_0^1 \ln t\, \mathrm{d}t$,

❷ $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$,

❸ $\int_0^{+\infty} x\sin x e^{-x}\, \mathrm{d}x$,

❹ $\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t}\, \mathrm{d}t$,

❺ $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$,

❻ $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$,

❼ $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$.

[Solution 12] **Exercice 12** Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

1 — Justifier que $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

2 — Montrer, À l'aide d'un changement de variable affine, que les deux intégrales ci-dessous sont de même nature et égales en cas de convergence :

$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^{1} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

3 — En déduire que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$, $y > 0$.

2.3 Fonctions de plusieurs variables

À revoir

Formule de la chaîne, dérivation de composées de plusieurs variables. On garde À l'esprit le caractère piégeux des notations $\frac{\partial f}{\partial x}$, *pf x etc.*, et on garde en tête $\partial_1 f$, $\partial_{1,1} f$ dérivation une fois selon la première variable, deux fois selon la première variable).
De plus, on se souvient aussi de la différence entre ces deux quantités :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x^2) \quad \text{dérivée partielle évaluée en } (x, x^2), \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x, x^2)\right) \quad \text{dérivée partielle de l'expression } f(x, x^2) \text{ par rapport À } x$$

[Solution 13] **Exercice 13** On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante en $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1 — Déterminer les fonctions $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fois dérivables telles que : $\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u, v) = 0.$

2 — On notera dans la suite par $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, x - 2y) \end{array} \right.$. On définit une fonction $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ par $F(\varphi(x, y)) = f(x, y)$ puisque φ est bijective.

2.1. Calculer les dérivées partielles de f notées $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(x, y))$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(x, y))$ de F. Faire de-même pour les dérivées partielles secondes.

2.2. En déduire les solutions de l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

2.4 Complément — exemple de résolution d'un système différentiel

On appelle système différentiel linéaire dans $\mathbf{R}^n$ tout système d'équations différentielles de la forme :

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad t \longmapsto x_i(t) \in \mathcal{D}_1(\mathbf{R}).$$

Par exemple

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= -3x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

est un système différentiel sur $\mathbf{R}^2$. Ou encore le système classique proie-prédateur de Lotka et Volterra est aussi un système différentiel, mais cette fois-ci $\boxed{\text{non linéaire}}$:

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(y) \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \qquad \text{(LoktaVolt)}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver une fonction vectorielle solution X**.**

Toute la difficulté réside (et mème pour le cas linéaire) dans le fait suivant : les lignes du système sont corrélées. Lorsque la matrice A est diagonalisable, il est possible (voir exercice ci-dessous) de réaliser un changement de vecteur variable ($Y = P^{-1}X$ avec P une certaine matrice inversible dans l'exercice qui suit) afin de décorréler les inconnues. Il suffit ensuite de résoudre chacune des équations différentielles.

[Solution 14] ■ **Exercice 14** Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1 — Diagonaliser la matrice A, *i.e.*montrer qu'il existe une matrice P inversible, et D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

2 — On considère le système

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_2' &= 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ x_3' &= -4x_1 + x_2 + 3x_3 \end{cases} \quad , \quad x_1, x_2, x_3 \text{ de classe } \mathcal{C}^1.$$

2.1. écrire le système précédent À l'aide de la matrice A et de $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2.2. Notons $Y = P^{-1}X$. Montrer que X est solution si et seulement si Y est solution de $Y' = DY$.

2.3. On note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Résoudre le système précédent.

3 — En déduire les solutions du système différentiel.

[Solution 15] ■ **Exercice 15** De manière générale, proposer une méthode pour résoudre $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.

3 Révisions de Probabilités & Statistiques

À revoir

❶ Rappeler ce qu'est une variable aléatoire discrète. ✍ *Support au plus dénombrable (i.e.dénombrable, ou bien fini)*

❷ Rappeler ce que signifie le vocabulaire suivant : « l'espérance converge », « admet une espérance ». ✍ *Convergence d'une série/intégrale. Convergence $\boxed{\text{absolue}}$ d'une série/intégrale dans le second cas.*

❸ Rappeler la formule des probabilités totales et composées. ✍ *Voir cours.*

❹ Supports des lois classiques, et expérience aléatoire associée. ✍ *Voir cours.*

3.1 Problème — G2E 2017. Probabilités discrètes.

■ **Problème 4** Dans ce problème, on s'intéresse À un jeu télévisé dans lequel il s'agit de remporter plusieurs victoires consécutives pour gagner la « super cagnotte ».
La partie 1 est consacrée À la démonstration de quelques propriétés de deux séries très classiques. Un cas simple de ce jeu est étudié dans la partie 2 (indépendante de la partie 1). L'entier n désigne dans ce problème un entier naturel non nul. Par ailleurs, on rappelle que :

$$0,65 \leq \ln(2) \leq 0,7.$$

Partie I— étude de deux séries réelles.

L'objectif de cette partie est d'étudier quelques propriétés des deux séries réelles de termes généraux $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k^2}$ (pour $k \in \mathbf{N}^*$). Les sommes partielles sont donc définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \textit{ et } \mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1 — Déterminer la nature de ces deux séries.

2 — **2.1.** énoncer le théorème donnant la formule des accroissements finis (en particulier, on précisera avec soin les hypothèses de ce théorème).

2.2. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

2.3. En déduire un encadrement de $\frac{1}{k}$ pour tout entier k supérieur À 2 puis démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \ln(n+1) \leq \mathrm{A}_n \leq \ln(n) + 1.$$

2.4. En déduire enfin que : $\mathrm{A}_n \underset{\infty}{\sim} \ln(n)$.

3 — On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\},\quad u_n = \mathrm{A}_{n-1} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \mathrm{A}_n - \ln(n).$$

3.1. Démontrer que $u_4 \geq 0,4$ et $v_4 \leq 0,8$.

3.2. étudier les sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ et démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}}$ convergent vers un même réel noté ℓ puis déterminer un encadrement de ℓ.

4 — **4.1.** Démontrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\},\quad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}.$$

4.2. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*\setminus\{1\}$, $\frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{2}{k^2}$ et en déduire que la série de terme général $\frac{1}{k(k-1)}$ est convergente.

4.3. Calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ et en déduire que $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est majorée par 2.

Partie II— Trois cadeaux.

Lors d'un jeu télévisé, le gagnant de la partie gagne le droit de faire tourner une roue sur laquelle se trouve une bille. La surface de cette roue est découpée en trois zones numérotées de 1 À 3 et ayant chacune la même aire. Lorsque la roue a cessé de tourner, la bille se trouve sur une zone qui rapporte chacun un cadeau différent. Si un candidat gagne plusieurs parties et remporte les trois différents cadeaux, il touche enfin la « super cagnotte ».
On suppose que les comportements de la roue et de la bille lors d'une victoire sont indépendants des résultats lors des victoires précédentes.

5 — **5.1.** Quelle est la probabilité que la zone sur laquelle se trouve la bille À l'issue de la première victoire soit la zone numéro 1 ?

5.2. Quelle est la probabilité que la zone sur laquelle se trouve la bille À l'issue de la seconde victoire soit la zone numéro 1 ?

6 — **6.1.** Quelle est la probabilité que la bille se trouve sur la zone numéro 1 au moins 3 fois en 4 victoires ?

6.2. Quelle est la probabilité que la bille se trouve sur deux zones distinctes atteintes exactement deux fois en 4 victoires ?

7 — Déduire de ce qui précède que la probabilité que la « super cagnotte » ait été remportée en (au plus) 4 victoires est égale à $\frac{4}{9}$.

3.2 Problème — EML 2017 VOIE E

■ **Problème 5** On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être

obtenue.
-Pour tout k de $\mathbf{N}^*$, on note :

✓ B_k l'événement : » on obtient une boule bleue au k-ième tirage"

✓ R_k l'événement : » on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I— Rang d'apparition de la première boule bleue.

On définit, pour $n \in \mathbf{N}^*$, les événements L_n : » la première boule bleue est obtenue au n ième tirage".

1 — ***(Question de cours)*** Rappeler l'énoncé de la formule des probabilités composées.

2 — Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(L_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

3 — Vérifier que la série $\left(\sum \mathbf{P}(L_n)\right)_{n\geq 1}$ converge et que sa somme est égale À 1.

4 — En déduire la probabilité de tirer au moins une boule bleue au cours de cette expérience. Commentez votre résultat.

Partie II— Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

On définit, pour tout k de $\mathbf{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale À 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale À 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

5 — Reconnaitre la loi de X_1, son espérance , sa variance.

6 — Quelles ont les valeurs prise par la variable S_n ?

7 — Donner, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbf{N}^*$.

8 — Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0; n]\!]$.

8.1. Calculer $\mathbf{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

8.2. Justifier : $\mathbf{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k}\mathbf{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$, puis en déduire : $\mathbf{P}([S_n = k]) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

9 — En déduire l'espérance de la variable aléatoire S_n.

3.3 Variables aléatoires À densité

À revoir

On rappelle les points suivants :

❶ densité = positivité + continuité sauf en un nombre fini de points + convergence de l'intégrale égale À un,

❷ théorème justifiant qu'une fonction de répartition est celle d'une variable aléatoire réelle à densité : continuité + C^1 sauf en un nombre fini de points.

Attention aux mélanges !

[Solution 16] ■ **Exercice 16** ***Inégalité de Chernoff pour une somme d'exponentielles*** On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On notera dans la suite $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ pour $x > 0$. On admet, car ce n'est pas l'objet de l'exercice, que $\Gamma(s)$ converge si et seulement si $x > 0$.

1 — Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$, que Y_n admet pour densité :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_{Y_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbf{R}^+}(t).$$

En déduire son espérance.

2 — **2.1.** Pour tout réel strictement positif λ, montrer que $\varphi(\lambda) = \ln\left(\mathbf{E}\left(e^{-\lambda(Y_n - \mathbf{E}(Y_n))}\right)\right) = n\,(\lambda - \ln(\lambda+1))$.

2.2. Montrer que $\forall \lambda > 0, \quad \varphi(\lambda) \leq \frac{n\lambda^2}{2}$.

3 — 3.1. Établir que pour tout réel λ strictement positif et tout réel x strictement positif, on a : $\mathbf{P}(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant e^{-\lambda x + \varphi(\lambda)}$.

3.2. Montrer que $\forall x > 0, \quad \mathbf{P}(\mathbf{E}(Y_n) - Y_n \geqslant x) \leqslant e^{-x^2/2n}$. *<u>Indication :</u> On pourra chercher à trouver le meilleur paramètre λ possible....*

4 — python Écrire une commande Python qui permet de simuler la variable aléatoire Y_n.

[Solution 17] ■ **Exercice 17** Soient X, Y deux variables aléatoires réelles à densité de loi $\mathcal{U}([0,1])$ et indépendantes. On note F_X et F_Y les fonctions de répartitions associées.

1 — Montrer que $X^2 - Y$ admet la fonction h ci-dessous pour densité : $x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leqslant x < 0, \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

2 — Déterminer la probabilité pour que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

[Solution 18] ■ **Exercice 18** ***Agro-Véto 2018*** Soit $c \in \mathbf{R}^{+\star}$. On considère une variable aléatoire réelle X de densité

$$f : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}, \quad t \longmapsto \begin{cases} \frac{t}{c^2} e^{-t^2/(2c^2)} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 — étudier la fonction f : variations, limite en ∞, valeur du maximum. Tracer le graphe de la fonction f.

2 — Vérifier que f est une densité de probabilité.

3 — 3.1. Rappeler, sans justification la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

3.2. En déduire que $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

3.3. Prouver que la variable aléatoire X possède une espérance.

4 — Soit $n \in \mathbf{N}$. Prouver que si X^n possède une espérance, alors X^{n+2} possède une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(X^{n+2}) = c^2(n+2)\mathbf{E}(X^n).$$

5 — En déduire, par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\mathbf{E}(X^{2n}) = 2^n c^{2n} n!, \quad \mathbf{E}(X^{2n+1}) = \sqrt{2\pi}\frac{(2n+1)!c^{2n+1}}{2^{n+1}n!}.$$

6 — 6.1. Ànoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

6.2. Déterminer $\mathbf{Var}(X)$.

6.3. En déduire $[\alpha, \beta]$ tel que $\mathbf{P}(X \in [\alpha, \beta]) \geqslant 99\%$.

7 — Déterminer un réel positif γ tel que $\mathbf{P}(X \in [0, \gamma]) = 99\%$.

8 — Comparer les intervalles obtenus aux questions précédentes. *On admettra que* $\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 10\sqrt{\frac{4-\pi}{2}} < 0$.

3.4 Problème Agro-Véto 2018 & Complément — chaînes de Markov sur un espace d'états fini

Les chaînes de Markov sont des suites de variables aléatoires bien particulières : leur trajectoire future dépend uniquement de l'instant présent et pas du passé. Ces variables aléatoires peuvent être À valeurs entières, sur un graphe (voir le sujet Agro-Véto ci-dessous), sur un espace vectoriel, ou plus généralement sur un ensemble E. L'ensemble E est appelé *espace des états*.
Les chaînes de Markov sont des grands classiques dans les sujets d'écrits, mais également dans les planches d'oraux,

dans la mesure où elles apparaissent dans un nombre important de contextes (marches aléatoires notamment). Pour cette raison, elles sont étudiées comme des objets À part entière. Les compléments de cours À la fin de ce polycopié ne sont À aborder qu'en seconde lecture une fois le problème Agro-Véto 2018 bien maaîtrisé !

3.4.1. Problème Agro-Véto 2018

■ **Problème 6** ***Agro-Véto 2018. Modèle de diffusion d'Ehrenfest.*** On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant À elles deux N boules avec $N \in \mathbf{N}^\star$. À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 À l'étape n. La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable aléatoire X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange. Par exemple, si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$.
On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal À 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal À 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_1 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de 3/5 et $X_3 = 4$ avec une probabilité de 2/5.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$. On a donc : $\forall k \in [\![0\,,\,N]\!], \quad Y_{n,k} = \mathbf{P}(X_n = k)$.

Partie I— Matrice de transition.

1 — On suppose que $N = 2$.

1.1. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad Y_{n+1} = A_2 Y_n$ avec $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. La matrice A_2 est-elle diagonalisable ? La réponse sera justifiée.

Dans toute la suite $N \in \mathbf{N}^\star$ est fixé.

2 — On considère la matrice $N \in \mathbf{N}^\star$ est fixé :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0\ldots & \ldots & & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{N}\ldots & & & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ldots & \ldots & & & \vdots \\ \vdots & & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{N-1}{N} & \vdots \\ \vdots & & \ldots & \ldots & \frac{2}{N} & 0 & 1 \\ 0 & & & \ldots & \ldots & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est donc une matrice ne comportant que des termes non nuls sur la première sur-diagonale, et sur la première sous-diagonale.
Prouver que : $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad Y_{n+1} = AY_n$.

3 — Déterminer lorsque $N = 2$ et $N = 3$ l'espace propre associé À la valeur propre 1 de ${}^{\mathsf{T}}A$.

4 — Prouver que, dans le cas général, la matrice ${}^{\mathsf{T}}A$ possède 1 comme valeur propre.

5 — En déduire que la matrice ${}^{\mathsf{T}}(A - I_{N+1})$ est non inversible puis que la matrice A possède 1 comme valeur propre.

Partie II— Détermination de l'espérance de la variable X_n.

Dans la suite, $n \in \mathbf{N}$ est fixé.

6 — Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?

7 — En déduire que : $\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{N}\mathbf{E}(X_n)$.

8 — En déduire l'expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n et de $\mathbf{E}(X_0)$.

9 — On suppose $N \geqslant 2$. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(X_n)$ lorsque n tend vers ∞, en donner une interprétation.

Partie III— Recherche d'une probabilité invariante.

On s'intéresse dans cette question À l'espace propre de A associé À la valeur propre 1, que l'on notera E_1.

10 — Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Prouver que pour tout $k \in [\![0\,,\,N]\!]$, $\quad x_k = \binom{N}{k} x_0$.

11 — En déduire $\dim E_1$.

12 — Calculer $\quad \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.

13 — Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que : $\quad \sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$. On donnera son expression.

14 — On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty(\Omega) = [\![0\,,\,N]\!], \quad \forall k \in [\![0\,,\,N]\!], \quad \mathbf{P}(X_\infty = k) = \pi_k.$$

Quelle est la loi de X_∞ ? Donner son espérance et sa variance.

15 — On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞. Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.

3.4.2. Complément de cours : généralités sur les chaînes de Markov.

De manière très générale, rappelons qu'une chaîne de Markov — comme décrite en introduction de cette section — doit vérifier la propriété suivante : c'est une suite de variables aléatoires (X_n) telle que « le futur ne dépend que du présent « , autrement dit X_{n+1} ne dépend que de X_n. On pourrait donc supposer l'existence d'une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$X_{n+1} = f(X_n).$$

Seulement voiLà , dans beaucoup de phénomènes l'évolution est aléatoire (dans le problème précédent, cela dépend du tirage aléatoire de l'entier entre 1 et N). La bonne définition devient la suivante.

Définition 1 | *chaîne de Markov*

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble. On appelle *chaîne de Markov sur $\mathcal{E}$* toute suite de variables aléatoires À valeurs dans $\mathcal{E}$ telle que :

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_n), \quad f : \mathcal{E} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (Y_n) \quad \text{i.i.d.} \quad \text{À valeurs réelles,} \quad \text{indépendantes de } X_0.$$

■ **Remarque 3.1 —** L'adjectif *chaîne* signifie *suite* de variables aléatoires. ■

Attention

Les variables aléatoires X_i ne sont **PAS** indépendantes entre elles ! Affirmer le contraire c'est admettre que l'on a rien compris aux chaînes de Markov.

■ **Remarque 3.2 —** La notion de chaîne de Markov généralise donc la notion de suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$; c'est leur version aléatoire. Bien entendu si X_0 et Y_n pour tout $n \in \mathbf{N}$ sont déterministes (non aléatoires) nous retrouvons les suites récurrentes classiques.

■ **Exemple 1 —** ***Marche aléatoire sur Z.*** Soit (Z_n) une famille i.i.d. de variables aléatoires réelles. Montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est une chaîne de Markov. ✍ *Ici, nous avons $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, il y a donc un lien très simple entre la valeur de S_n et celles de S_{n+1} :*

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longmapsto x + y, \quad (Y_n) = (X_n)\,.$$

*Notons que comme les éléments de (X_n) sont i.i.d., nécessairement nous avons que Y_{n+1} est indépendant de $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Au niveau de l'espace des états (i.e.les valeurs prises par S_n, nous ne pouvons faire mieux sans expliciter une loi pour (X_n),Â a priori c'est donc **R** pour le moment.* Supposons que les X_i sont de support $\{-1, 1\}$ et $\mathbf{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Que vaut $\mathcal{E}$? On parle de *marche aléatoire simple.* ✍ *Cette fois-ci l'espace des états est $\mathcal{E} = \mathbf{Z}$.*

■ **Exemple 2 —** ***Modèle de diffusion d'Ehrenfest, retour sur le problème précédent.*** Montrer que la chaîne (X_n) définie dans le problème Agro-Véto 2018 est une chaîne de Markov. ✍ *En effet, X_n est ici le nombre de boules dans l'urne U_1 au bout de n expériences aléatoires, nous avons vu qu'elle était À valeurs dans $\mathcal{E} = [\![0\,,\,N]\!]$, qui correspond donc ici l'espace des états. Ici, nous considérons*

❶ *(Y_n) telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\quad Y_n$ est le tirage réalisé au temps n sur $[\![0\,,\,N]\!]$, i.e.$Y_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0\,,\,N]\!])$.*

❷ *La fonction f vérifie donc : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R} \times [\![0\,,\,N]\!]$,* $f(x, y) = \begin{cases} x+1 & \text{si } y < x, \quad x \in [\![0\,,\,N-1]\!], \\ x-1 & y \geqslant x, \quad x \in [\![1\,,\,N]\!], \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ N-1 & \text{si } x = N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Puisque les X_n sont pour tout $n \in \mathbf{N}$ des variables aléatoires, nous pouvons nous intéresser À leur loi. En réalité, puisque la chaîne (X_n) est définie *via* une relation de récurrence, c'est plutÀ´t les lois conditionnelles qui sont faciles À calculer. Si je sais où je suis au temps $n-1$, alors je saurai avec quelle probabilité on sera au temps n. Ces probabilités on peut les ranger dans une matrice, que l'on appelle *matrice de transition*.

Définition 2 | *Transitions*

Soit (X_n) une chaîne de Markov À valeurs dans $\mathcal{E}$ un ensemble. On appelle *probabilités de transition au temps n* les quantités

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, \quad P_n(x, y) = \mathbf{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x).$$

Lorsque $\mathcal{E} = \{x_1, \cdots, x_p\}$ est un ensemble fini, alors on appelle *matrice de transition au temps n* la matrice de format $p \times p$:

$$\left(P_n(x_i, x_j)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} P_n(x_1, x_1) & \ldots & P_n(x_1, x_p) \\ \vdots & & \vdots \\ P(x_p, x_1) & \ldots & P(x_p, x_p) \end{pmatrix}.$$

Lorsque P_n ne dépend pas de n on dit que la chaîne est *homogène*.

Ce sont donc les probabilités de passer d'un état x À un état y au temps n.

■ **Exemple 3 —** On reprend l'Exemple 1 dans le cas de la marche simple.

Calculer les probabilités de transition de (X_n). ✍ *Nous devons calculer, pour $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, les probabilités ci-dessous :*

$$\mathbf{P}(S_{n+1} = y | S_n = x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y = x+1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = x+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous ne pouvons pas représenter ces probabilités dans une matrice puisque l'espace des états est infini.

Proposition 1

Soit (X_n) une chaîne de Markov À valeurs dans $\mathcal{E}$ un ensemble. Alors :

1. $\sum_{y\in\mathcal{E}} P_n(x,y) = 1$. Lorsque $\mathcal{E}$ est un ensemble fini, on dit que la matrice P_n est *stochastique* : la somme sur une ligne des coefficients vaut un.
2. ***(Chapman-Kolmogorov)*** On suppose ici que $\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_p\}$ est un espace d'état fini. Notons ν_n le vecteur de loi de X_n, *i.e.*

$$\nu_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X_n = x_p) \end{pmatrix}.$$

Alors on a la relation : $\nu_{n+1} = P_n \nu_n$.

■ **Remarque 3.3 —** La relation $\nu_{n+1} = P_n\nu_n$ montre tout l'intérèt de la notion de matrice de transition : pour avoir la loi au temps suivant, il suffit de multiplier À gauche la loi au temps précédent par la matrice de transition. En particulier, si la chaîne est homogène, *i.e.*$P_n = P$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et P une matrice $p \times p$, alors $\nu_n = P^n \nu_0$. ■

Preuve

1. C'est un calcul direct : $\sum_{y\in\mathcal{E}} P_n(x,y) = \sum_{y\in\mathcal{E}} \mathbf{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x) = 1$, puisque l'application $A \in \Omega \longmapsto \mathbf{P}(A|X_{n-1} = x)$ est pour tout entier n et $x \in \mathcal{E}$ une probabilité sur Ω.
2. Soit $i \in [\![1\,,\,p]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\nu_{n+1}(x_i) = \mathbf{P}(X_{n+1} = x_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_i | X_n = x_j\Big)\,\mathbf{P}\left(X_n = x_j\right) = \sum_{j=1}^{p} P_n(x_i, x_j)\mathbf{P}\left(X_n = x_j\right)$$

Le dernier temps correspond au coefficient i du vecteur $P_n\nu_n$. La formule est établie.

■

4 Solutions

■■ *Solution (Exercice 3)*

1 — M est inversible si et seulement si $AB - BA \neq 0$. Donc l'évènement « M inversible » est finalement l'ensemble vide, donc de probabilité nulle. Calculons à présent M^2.

Nous avons $M^2(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^2+AB)(\omega) & (AB+B^2)(\omega) \\ (A^2+AB)(\omega) & (AB+B^2)(\omega) \end{pmatrix}$. La matrice précédente est nulle si et seulement si $A + B = 0$ ou bien $A = 0$ et $B = 0$. Il reste à écrire cela avec des réunions et intersections.

$$\mathbf{P}(\text{M nilpotente}) = \mathbf{P}\left(\{A = 0\} \cap \{B = 0\}) \cup \{A + B = 0\}\right).$$

Attention, les deux évènements précédents ne sont pas disjoints, on ne peut écrire qu'il s'agit de la somme des deux probabilités. Mais, $\{A + B\} = 0 = \{A = 0\} \cap \{B = 0\}$ puisque A, B sont positives. On déduit, par indépendance de A et B :

$$\mathbf{P}(\text{M nilpotente}) = \mathbf{P}(A = 0)\mathbf{P}(B = 0) = \boxed{(1-p)^{2n}}.$$

Nous avons par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(M^2 = M) &= \mathbf{P}(A^2 + AB = A, AB + B^2 = B) = \mathbf{P}(A(A + B - 1) = 0, B(B + A - 1) = 0) \\
&= \mathbf{P}(A + B = 1) + \mathbf{P}(A = 0)\mathbf{P}(B = 0) \\
&= \mathbf{P}(A = 0, B = 1) + \mathbf{P}(A = 1, B = 0) + \mathbf{P}(A = 0)\mathbf{P}(B = 0) \\
&= \mathbf{P}(A = 0)\mathbf{P}(B = 1) + \mathbf{P}(A = 1)\mathbf{P}(B = 0) + \mathbf{P}(A = 0)\mathbf{P}(B = 0) \quad \boxed{= 2n(1-p)^n p(1-p)^{n-1} + (1-p)^{2n}}
\end{aligned}$$

Dans ce cas, en revanche, les évènements $\{A + B - 1 = 0\}$ et $\{A = 0, B = 0\}$ sont bien disjoints, ce qui légitime le calcul précédent.

2 — Notons N la variable aléatoire donnant le nombre de valeurs propres. Alors $\boxed{N(\Omega) = \{1, 2\}}$ puisque M est de format 2×2. De plus, par calcul simple de déterminant, on déduit que : $\mathrm{Spec}(M) = \{0, A + B\}$. Donc $\mathbf{P}(N = 1) = \mathbf{P}(A + B = 0) = \mathbf{P}(A = 0)\mathbf{P}(B = 0) = \boxed{(1-p)^{2n}}$. Et $\boxed{\mathbf{P}(N = 2 = 1 - (1-p)^{2n}.}$
L'espérance vaut alors $\mathbf{E}(N) = 1 - (1-p)^{2n}$ et $\mathbf{Var}(N) = 1 - (1-p)^{2n}$. Utilisons le système complet $\{N = 1\}, \{N = 2\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\text{Mdiagonalisable}) &= \mathbf{P}(\text{Mdiagonalisable} \cap \{N = 1\}) + \mathbf{P}(\text{Mdiagonalisable} \cap \{N = 2\}) \\ &= \mathbf{P}(\text{Mdiagonalisable} \cap \{N = 1\}) + \mathbf{P}(\{N = 2\})\end{aligned}$$

où à la dernière ligne nous avons utilisé le fait que toute matrice ayant deux valeurs propres distinctes est diagonalisable. De plus,

$$\mathbf{P}(\text{Mdiagonalisable} \cap \{N = 1\}) = \mathbf{P}(A = 0, B = 0, A = B = 0) = \mathbf{P}(A = 0)\mathbf{P}(B = 0) = (1-p)^{2n}.$$

Car toute matrice diagonalisable ayant une seule valeur propre est du type λI avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Donc

$$\mathbf{P}(\text{Mdiagonalisable}) = \boxed{(1-p)^{2n} + 1 - (1-p)^{2n}}.$$

3 — La plus grande valeur propre au sens large est $A + B$, qui suit, par indépendance, une $\mathcal{B}(2n, p)$.

■■ *Solution (Exercice 5)*

On résout en λ l'équation suivante :

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

On vérifie sans peine que les solutions de l'équation sont 4 et -1. Ainsi, puisque nous avons deux valeurs propres distinctes, la matrice A est diagonalisable, $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 4\}$, et diagonalisable dans une base orthonormée car symétrique réelle.
Après résolution de système linéaire, nous obtenons

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs sont orthogonaux mais pas normés. Il reste donc À les diviser par leur norme pour obtenir une matrice de passage orthogonale [...].

■■ *Solution (Problème 5)*

Partie I— Définitions et premières propriétés.

1 — Soient B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A
1.1. $AB_1AB_2 = (AB_1A)\,B_2 = AB_2\,(AB_1)\,(AB_2) = (B_1A)\,(B_2A) = B_1\,(AB_2A) = B_1A = AB_1$
1.2. $AB_2 = AB_1$ d'où en multipliant par B_2 À gauche : $B_2AB_2 = B_2AB_1$ d'où $B_2 = B_2AB_1$
$AB_2 = AB_1$ d'où $B_2A = B_1A$ d'où en multipliant par B_1 À droite
$B_2AB_1 = B_1AB_1$ d'où $B_1 = B_2AB_1$

$$\boxed{B_1 = B_2}$$

Il y a unicité de la pseudo inverse.

2 — **2.1.** $A = 0$, $B = 0$ vérifie (1) donc 0 est pseudo-inversible de pseudo-inverse 0.
2.2. Soit M une matrice inversible inversible. Alors $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$, les deux autres lignes de la condition de pseudo inversibilité sont également vérifiée (les deux membres des ligneq deux et trois sont égaux À M si $B = M^{-1}$). Donc $\boxed{\text{M est pseudo-inversible de pseudo-inverse } M^{-1}.}$
2.3. N est pseudo-inversible :
- ■ **2.3.1.** $N^*N^k = (N^*N)\,N^{k-1} = (NN^*)\,NN^{k-2}$ car $k \geq 2$. $N^*N^k = (NN^*N)\,N^{k-2} = NN^{k-2} = N^{k-1}$.
- ■ **2.3.2.** Supposons que $p \geq 2$, $N^*N^p = N^{p-1}$ d'où $N^{p-1} = 0$ ce qui est contradictoire. Donc $p = 1$ et la matrice N est donc nulle.
- ■ **2.3.3.** La matrice N de l'énoncé est bien nilpotente car $N^2 = 0$ et $N \neq 0$. D'après la question précédente, on peut affirmer que $\boxed{\text{N n'est pas pseudo-inversible.}}$

3 — **3.1.** Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, .., d_n)$ une matrice diagonale. Définissons $B = \mathrm{Diag}(b_1, .., b_n)$ tel que si $d_i \neq 0$, $b_i = \frac{1}{d_i}$, sinon on pose $b_i = 0$.
On vérifie sans peine que B est la pseudo-inverse de D.
En revanche, pour l'inversibilité classique, cela est clairement faux dès que la diagonale contient au moins un élément nul (dans ce cas le rang est strictement inférieur À n).

3.2. Soit A^* pseudo inverse de A. On a bien envie de montrer que $B = P^{-1}A^*P$ est la pseudo-inverse de A'. En effet : $A'B = P^{-1}APP^{-1}A^*P = P^{-1}AA^*P = P^{-1}A^*AP = P^{-1}A^*PP^{-1}AP = BA'$.
$BA'B = P^{-1}A^*PP^{-1}APP^{-1}A^*P = P^{-1}A^*AA^*P = P^{-1}AP = A'$. De même , on montre que $A'BA' = B$. Ainsi $\boxed{A' \text{ est pseudo-inversible et sa pseudo-inverse est } P^{-1}A^*P.}$

3.3. Si A est diagonalisable, A est semblable À une matrice diagonale D : il existe P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, $A = Q^{-1}DQ$ avec $Q = P^{-1}$. La matrice D étant diagonale, elle est pseudo [1]-inversible et donc A l'est aussi par le résultat précédent.

3.4.

- **3.4.1.** λ est valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{Rg}(A-\lambda I) < 3$. Après application classique de la méthode du pivot, nous obtenons
$$\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \{0, 2, 4\}}$$
Déterminons les sous-espaces propres : $X \in E_0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -8z = 0 \\ 4z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$
$$\boxed{E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$
$X \in E_2 \Leftrightarrow (A - 2I)\,X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ -2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$
$X \in E_4 \Leftrightarrow (A - 4I)\,X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ -4y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$ Soit P la matrice de passage de la base canonique À la base de vecteurs propres : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ Par formule de changement de base, $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \mathrm{Diag}(0, 2, 4).}$
- **3.4.2.** La matrice A admet trois valeurs propres distinctes, de format 3×3 donc $\boxed{\text{elle est diagonalisable.}}$
- **3.4.3.** Puisqu'elle est semblable À une matrice diagonale, d'après ce qui précède, elle est pseudo-inversible.
- **3.4.4.** De plus, toujours d'après les questions précédentes, $A^* = PD^*P^{-1}$ avec $D^* = \mathrm{Diag}(0, 1/2, 1/4)$.
Déterminons P^{-1} par exemple en résolvant $PX = Y$ en X. $\begin{cases} x + z &= a \\ x + y &= b \\ y + z &= c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= \frac{a+b+c}{2} \\ x + y &= b \\ y + z &= c \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x + y + z &= \frac{a+b+c}{2} \\ z &= \frac{a-b+c}{2} \\ y &= \frac{a+b-c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{-a+b+c}{2} \\ z &= \frac{a-b+c}{2} \\ y &= \frac{a+b-c}{2} \end{cases}$
$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$
$$\boxed{A^* = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Partie II— Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles.

4 — 4.1. Immédiat car a et $a^\star$ commutent, d'où $\boxed{a^* \circ a \circ a = a.}$ $AA^*A = A = AAA^*$ d'où $\boxed{a \circ a \circ a^* = a}$

4.2. Soit $y \in \mathrm{Im}\, a \cap \mathrm{Ker}\, a$, il existe $x \in E$, $y = a(x)$. $a(y) = 0 = a^2(x)$ d'où $a^*(a^2(x)) = 0 = a(x) = y$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}\, a \cap \mathrm{Ker}\, a = \{0\}}$ L'autre inclusion est bien entendu vérifiée aussi, car $\mathrm{Ker}\, a \cap \mathrm{Im}\, a$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ donc contient nécéssairement l'élément nul.

4.3. ■ ***Analyse –*** Soit x et y tel que $z = x + y$ avec $(x, y) \in \mathrm{Ker}\, a \times \mathrm{Im}\, a$. Il existe t tel que $y = a(t)$ donc $a(z) = a(x) + a(y) = a^2(t)$ d'où $a^*(a(z)) = a^*(a^2(t)) = a(t) = y$. On pose alors $\boxed{y = a^*(a(z)) \text{ et } x = z - a^*(a(z))}$. On a montré en plus que si la décomposition existe, elle est unique. ■ ***Synthèse.*** On vérifie ensuite que la

1. et on insiste bien sur le mot **pseudo**

décomposition trouvée précédemment convient. Soit $z \in \mathbf{R}^n$, posons $y = a^*(a(z))$ et $x = z - a^*(a(z))$.
On a de manière évidente $z = x + y$. De plus, $y = a^*(a(z)) = a^* o a(z) = a \circ a^*(z) = a\left(a^*(z)\right)$ donc $y \in \operatorname{Im} a$.
De plus, $a(x) = a(z) - a \circ a^* \circ a(z) = 0$ car $aoa^* \circ a = a$, donc $x \in \operatorname{Ker} a$.

$\boxed{\text{Pour tout } z, \text{ il existe un unique } (x, y) \in \operatorname{Ker} a \times \operatorname{Im} a \text{ tel que } z = x + y.}$

5 — 5.1. Montrons que a_0 est un endomorphisme de $\operatorname{Im} a$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} a_0$, $a_0(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Im} a = \{0\}$. Donc $\operatorname{Ker} a_0 = \{0\}$ donc a_0 est injectif. Puisque a_0 est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, nous avons alors : $\boxed{a_0 \text{ bijectif.}}$

5.2. ■ **5.2.1.** D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} a + \operatorname{Rg}(a) = \dim \mathrm{E}$ donc $\boxed{n = r + s.}$

■ **5.2.2.** Soient $\alpha_1, .., \alpha_s, \beta_1, .., \beta_s$ tels que $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_s e_s + \beta_1 f_1 + ... + \beta_r f_r = 0$.
$a\left(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_s e_s + \beta_1 f_1 + ... + \beta_r f_r\right) = 0.$ d'où $\beta_1 a(f_1) + ... + \beta_r a(f_r) = 0$ car $e_1, .., e_s \in \operatorname{Ker} a$ d'où $\beta_1 a_0(f_1) + ... + \beta_r a_0(f_r) = 0$.
Or a_0 est un endomorphisme bijectif, donc l'image d'une base de $\operatorname{Im} a$ est encore une base de $\operatorname{Im} a$. Ainsi $(a_0(f_1), .., a_0(f_r))$ est une famille libre donc $\beta_1 = ... = \beta_s = 0$. Ainsi $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_s e_s = 0$ et $(e_1, ..e_s)$ est une famille libre donc $\alpha_1 = .. = \alpha_s = 0$. D'où $(e_1, ..e_s, f_1, .., f_r)$ est une famille libre de $\mathbf{R}^n$. Puisque $\dim \mathbf{R}^n = n$, nous obtenons le résultat souhaité :

$\boxed{(e_1, ..e_s, f_1, .., f_r) \text{ est une base de } \mathbf{R}^n.}$

■ **5.2.3.** Tout vecteur x se décompose sur la base ci-dessus. Il existe une unique famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ telle que :

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_s e_s + \beta_1 f_1 + ... + \beta_r f_r.$$

On pose $x_1 = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_s e_s \in \operatorname{Ker} a$, $x_2 = \beta_1 f_1 + ... + \beta_r f_r \in \operatorname{Im} a$.
Montrons l'unicité : si $x = x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ avec $x_1, x_3 \in \operatorname{Ker} a$ et $x_2, x_4 \in \operatorname{Im} a$, on a alors $x_1 - x_3 = -x_2 + x_4$. Nous avons $x_1 - x_3 \in \operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Im} a = \{0\}$ d'où $x_1 = x_3$, $-x_2 + x_4 = 0$ d'où $x_2 = x_4$. Il y a donc unicité de la décomposition.

$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ , il existe un unique couple } (x_1, x_2) \text{ tel que } x_1 \in \operatorname{Ker} a \text{ et } x_2 \in \operatorname{Im} a \text{ et } x = x_1 + x_2.}$

5.3. On pose $b(x) = (a_0)^{-1}(x_2)$. L'application b est une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Soient $x, y \in \mathbf{R}^n$, λ, μ, donnons de plus un nom aux décompositions de x, y : $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in \operatorname{Ker} a$ et $x_2, y_2 \in \operatorname{Im} a$. Nous avons $\lambda x + \mu y = \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 = z_1 + z_2$ avec $z_1 = \lambda x_1 + \mu y_1 \in \operatorname{Ker} a$ et $z_2 = \lambda x_2 + \mu y_2 \in \operatorname{Im} a$. D'où $b(\lambda x + \mu y) = (a_0)^{-1}(\lambda x_2 + \mu y_2) = \lambda (a_0)^{-1}(x_2) + \mu (a_0)^{-1}(y_2)$ car $(a_0)^{-1}$ est linéaire, $b(\lambda x + \mu y) = \lambda b(x) + \mu b(y)$ donc b est linéaire.

$\boxed{b \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{R}^n.}$

5.4. On reprend les mèmes notations que dans la question précédente. Nous avons $a \circ b(x) = a\left((a_0)^{-1}(x_2)\right) = x_2$.
De plus $b \circ a(x) = b \circ a(x_2) = (a_0)^{-1}(a(x_2))$ car $a(x_2) \in \operatorname{Im} a$ d'où $b \circ a(x) = x_2$. Donc pour tout x, $a \circ b(x) = b \circ a(x)$ d'où $\boxed{a \circ b = b \circ a}$. On vérifie de la même manière les autres conditions.

5.5. Soit B la matrice de b dans la base canonique , alors B vérifie les conditions de pseudo-inversibilité comme nous venons de le montrer. Donc A est pseudo-inversible, de pseudo-inverse B.

6 —

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A_0 étant inversible, elle est pseudo-inversible de pseudo inverse A_0^{-1}. Posons $\mathrm{B}' = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors B' vérifie les conditions de pseudo-inversibilité, donc A' est pseudo-inversible de pseudo inverse B'. Or A est semblable À A′, donc A est pseudo-inversible (d'après une question précédente).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Réciproquement, supposons que A est pseudo-inversible. D'après une question précédente $\operatorname{Im} a \cap \operatorname{Ker} a = \{0\}$.
On peut donc construire une base de $\mathbf{R}^n$ notée $\mathcal{B} = (f_1, .., f_r, e_1, ..e_s)$ comme ci-dessus.

$\underset{\mathcal{B}}{\mathcal{M}\mathrm{at}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où A_1 est la matrice de a_0 dans la base $(f_1, .., f_r)$ de $\operatorname{Im} a$. Comma a_0 est bijectif, A_1 est inversible. Les matrices A et $\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes donc sont semblables.

$\boxed{\text{A est pseudo-inversible ssi A est semblable À une matrice de la forme } \begin{pmatrix} \mathrm{A}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathrm{A}_0 \text{ inversible.}}$

Solution (Problème 6)

1 — On regarde un maximum sur des quantités positives, donc $\boxed{\|M\| \geqslant 0 \text{ pour toute matrice } M}$.

2 —
```
def question1(L):
        n=len(L)
        for i in range(n):
                if (L[i]**2)*sum([1/(L[j]**2) for j in range(n)]) < 2:
                        return False
        return True
```
Une exécution dans la console donne alors :
```
>>> M=np.array([[1,2],[2,3]])
>>> Norme(M)
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
NameError: name 'Norme' is not defined
```
Le problème de cette fonction, c'est qu'elle ne fonctionne pas si la matrice de départ est une ligne ou une colonne (auquel cas l'une ou l'autre des commandes `m=d[0]`, `n=d[1]` renvoie une erreur). On refait donc le travail dans la question suivante pour des colonnes.

3 —
```
import numpy as np

def Normalise(v):
    """On suppose ici que v est une colonne, la fonction renvoie sa norme"""
    m=v.shape[0]#Longueur de v
    MAX=0
    for i in range(m):
        if np.abs(v[i])>MAX:
                MAX=np.abs(v[i])
    return v/MAX
```
Par exemple, `Normalise(np.array([1,2,3]))` renvoie **??**.

4 —
```
import numpy as np
import numpy.random as nprd
def PuissanceIteree(A, n):
    p=A.shape[0]#Nombre de lignes = nombre de colonnes
    v=nprd.rand(p,1)#Vecteur de loi uniforme en utilisant le module numpy.random
    for k in range(1,n):
        v=Normalise(np.dot(A,v))
    return v
A=np.array([[1,0],[0,2]])
```
Par exemple, un exécution de `PuissanceIteree(A, 10)` renvoie `array([[7.81438549e-04],        [1.00000000e+00]])`.

5 — ➊ Les programmes A et C sont corrects.

➋ Cependant la boucle `while` du programme B ne possède aucune condition d'arrèt dans la mesure où l'écart n'est pas modifié.

Solution (Exercice 11)

1 — L'intégrale est généralisée en 0, puisque $\ln :]0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue. Inutile ici d'appliquer un résultat de comparaison, puisque l'intégrale partielle se calcule explicitement, soit $\varepsilon > 0$:

$$\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt = [t\ln t - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -1$$

par croissances comparées.

2 — L'intégrale est généralisée en $+\infty$, la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ étant continue sur $[0,\infty[$. Puisqu'elle est positive, et que :

$$t^2 e^{-t^2} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

nous avons pour t assez grand : $e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$. Ainsi, puisque $\int_1^A \frac{1}{t^2}\, dt = -\left[\frac{1}{t}\right]_1^A \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 1$, la convergence de $\int_1^\infty e^{-t^2}\, dt$ en découle par théorème de comparaison pour les fonctions positives. De plus, $\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$ converge en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment. En conclusion, l'intégrale est convergente.

3 — Il suffit de montrer la convergence de $\int_1^{\infty} x \sin x e^{-x}\, \mathrm{d}x$ puisque $\int_0^1 x \sin x e^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge en tant que fonction continue sur un segment. De plus, puisque la fonction n'est pas positive on regarde la convergence absolue :

$$x^2 \left|x \sin x e^{-x}\right| \leqslant x^3 e^{-x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

impliquant que pour x assez grand :

$$\left|x \sin x e^{-x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

La convergence découle alors À nouveau du théorème de comparaison.

4 — L'intégrale $\int_0^{\infty} \ln t e^{-t}\, dt$ est généralisée en 0 et $+\infty$.

Commençons par $\int_1^{\infty} \ln t e^{-t}\, \mathrm{d}t$. Nous avons une exponentielle qui rend le tout convergeant. En effet, $t^2 \ln t e^{-t} = t^3 \frac{\ln t}{t} e^{-t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc pour t assez grand :

$$\ln t e^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Or, $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge, donc $\int_1^{\infty} \ln t e^{-t}\, dt$ converge par théorème de comparaison.

Continuons avec $\int_1^{\infty} \ln t e^{-t}\, \mathrm{d}t$. L'intégrande est négative, on étudie donc $\int_1^{\infty} (-\ln t) e^{-t}\, \mathrm{d}t$. En zéro, nous avons $(-\ln t)e^{-t}\, \mathrm{d}t \underset{t\to 0}{\sim} -\ln t$. Nous avons déjÀ vu que $\int_0^1 \ln t\, \mathrm{d}t$ converge, donc comme pour t assez proche de 0, on a

$$(-\ln t)e^{-t} \leqslant \frac{3}{2} \ln t,$$

la convergence découle du théorème de comparaison.
En conclusion, l'intégrale converge.

5 — L'intégrale est généralisée en zéro et un, on étudie donc $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ et $\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$.

Pour la première, nous avons $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{1-t}$. Or, $\int_0^{A} \frac{1}{1-t}\, \mathrm{d}t = [-\ln(1-t)]_0^{A} = -\ln(1-A) \underset{A\to 1}{\longrightarrow} -\infty$. L'intégrale ne converge pas.

6 — L'intégrale est généralisée en 0 et $+\infty$. On étudie donc $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$.
On a $\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, donc pour t assez proche de zéro :

$$-\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} \leqslant -\frac{1}{2t},$$

et $\int_A^1 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \underset{A\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc cette intégrale diverge, donc l'intégrale de départ diverge aussi par théorème de comparaison.
Notez que le signe moins est obligatoire puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}$ est négative sur $]0,1]$.

7 — On majore simplement : $\cos^2(1/t) \leqslant 1$ pour tout $t \in]0,1]$ et $\int_0^1 1\, \mathrm{d}t$ converge.

■■ *Solution (Exercice 13)*

1 — L'ensemble des fonctions F vérifiant la condition est l'ensemble des fonctions du type :

$$F(u,v) = vC(u) + D(u), \quad C, D \text{ dérivables.}$$

2 — Dérivons l'identité $F(\varphi(x,y)) = f(x,y)$ par rapport à x et par rapport) y. On notera plus simplement $(u,v) = \varphi(x,y)$ dans la suite au lieu de $(u(x,y), v(x,y)) = \varphi(x,y)$:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 2\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) - 2\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{array}\right.}.$$

Puis on redérive.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = 4\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial u}(u,v) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial u}(u,v) + 1\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u,v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & 1\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v) - 2\frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial u}(u,v) - 2\frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial u}(u,v) + 4\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u,v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) & = & 2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v) + 1\frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial u}(u,v) - 4\frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial u}(u,v) - 2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(u,v). \end{array}\right.$$

3 — En réecrivant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ à l'aide des dérivées partielles calculées précédemment, nous obtenons la bonne équation aux dérivées partielles. Donc $F(u,v) = vC(u) + D(u)$ avec C, D dérivables. Donc pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

on a :
$\boxed{f(x,y) = (x-2y)\mathrm{C}(2x+y) + \mathrm{D}(2x+y).}$

■■ Solution (Exercice 14)

1 — Après calculs, on trouve que Spec(A) $= \{-2, 2, 1\}$, donc puisque nous avons trois valeurs propres di-stinctes la matrice A est bien diagonalisable. On obtient toujours après calculs une base propre qui convient, ici

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}, \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D} = \mathrm{Diag}\,(-2, 2, -1)\,.$$

Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé, on s'arrète Là !

2 — **2.1.** Le système se réecrit précisément : $\boxed{\mathrm{X}' = \mathrm{AX}.}$

2.2. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} \text{ solution} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{X}' = \mathrm{AX} = (\mathrm{PY})' \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{X} = \mathrm{PDY} = \mathrm{PY}', \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{DY} = \mathrm{Y}' \text{ en simplifiant par P À gauche.} \end{aligned}$$

Un point a été passé sous silence : $(\mathrm{PX})' = \mathrm{PX}'$. Comme P est une matrice qui ne dépend pas de la variable du système, on justifie sans peine la formule précédente.

2.3. Nous avons donc À résoudre le système décorrèlé suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & -2y_1 \\ y_2' & = & 2y_2 \\ y_3' & = & -y_3 \end{array}\right.$.

Nous obtenons pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$y_1(x) = \mathrm{C}_1 e^{-2x}, \quad y_1(x) = \mathrm{C}_1 e^{2x}, \quad y_3(x) = \mathrm{C}_3 e^{-x}, \quad \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3 \in \mathbf{R}.$$

On déduit alors l'ensemble des solutions.

■■ Solution (Problème 15)

Partie I— .

1 — La série (A_n) est divergente et la série (B_n) est convergente. Pour le justifier, refaire une comparaison série/intégrale.

2 — **2.1. Théorème des accroissements finis.** Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors

$$\exists c \in]a,b[: \; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

2.2. Soit $x > 0$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué À $f = \ln$ sur l'intervalle $[x, x+1]$:

$$\exists c \in]x, x+1[: \; \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x).$$

D'où le résultat demandé puisque le fait que $c \in]x, x+1[$ entraîne que $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{x}$.

2.3. Soit $k \in \mathbf{N}$ avec $k \geq 2$. En appliquant la question précédente aux réels $x = k$ et $x = k-1$ on obtient :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

Par conséquent on a d'une part :

$$\mathrm{A}_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) = 1 + \ln(n)$$

$$\mathrm{A}_n \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$$

(par télescopage).

2.4. On a l'encadrement :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{\mathrm{A}_n}{\ln(n)} \leq \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)}$$

et on remarque que :

- $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations ;

- $\frac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations.

En conclusion le théorème des gendarmes nous donne $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{\ln(n)} = 1$ donc $A_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

3 — 3.1. On calcule :

$$A_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{16}, \quad A_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

En utilisant la donnée $\ln(2) \in [0,65; 0,7]$:

$$u_4 = A_3 - 2\ln(2) \geq \frac{11}{6} - \frac{14}{10} = \frac{26}{60} \geq \frac{24}{60} = 0,4$$

$$v_4 = A_4 - 2\ln(2) \geq \frac{25}{12} - \frac{13}{10} = \frac{47}{60} \leq \frac{48}{60} = 0,8.$$

3.2. On a pour tout $n \geq 2$:

$$u_{n+1} - u_n = A_n - A_{n-1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geq 0,$$

d'après la question 2.2. et de même :

$$v_{n+1} - v_n = A_{n+1} - A_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0.$$

Ainsi $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Comme par ailleurs $v_n - u_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers un même réel ℓ. D'après les monotonies de ces deux suites on a :

$$\forall n \geq 2,\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

Pour $n = 4$ la question 3(a) nous donne ainsi :

$$0,4 \leq \ell \leq 0,8.$$

4 — 4.1. On a, par identification :

$$\left(\forall k \in \mathbf{N}^\star,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}\right) \Leftrightarrow \left(\forall k \in \mathbf{N}^\star,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{(a+b)k - a}{k(k-1)}\right)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

4.2. Soit $k \in \mathbf{N}^\star \setminus \{1\}$. On a $k \geq 2$ donc $2(k-1) \geq k$ et en divisant par $k^2(k-1)$:

$$\frac{2}{k^2} \geq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Comme la série $\sum \frac{2}{k^2}$ est convergente, par comparaison la série $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ l'est aussi.

4.3. On a par télescopage, pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

donc en faisant tendre $n \to \infty$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1.$$

On remarque maintenant que pour $n \geq 2$:

$$B_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

donc finalement $B_n \leq 1 + 1 = 2$.

Partie II— .

5 — Notons X_k le numéro de la zone tirée après la k-ème victoire. L'énoncé dit que les v.a. $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^\star}$ sont indépendantes et de même loi uniforme sur $\{1,2,3\}$.

5.1. Conséquence de l'énoncé : $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$.

5.2. On a $\mathbf{P}(X_2 \neq 1) = \mathbf{P}(X_2 = 2) + \mathbf{P}(X_2 = 3) = \frac{2}{3}$.

6 — **6.1.** Notons N_i le nombre de fois que la zone i est tirée sur les 4 premières victoires. D'après les conditions de l'expérience, N_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4, 1/3)$ et ainsi :

$$\mathbf{P}(N_1 \geq 3) = \mathbf{P}(N_1 = 3) + \mathbf{P}(N_1 = 4) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{2}{3} + \frac{1}{3}^4 = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}.$$

6.2. Soit A l'évènement donné par l'énoncé. On modélise naturellement l'expérience par $\Omega = \{1,3\}^4$ avec la probabilité uniforme $\mathbf{P}$ sur Ω. On a alors

$$\# A = \binom{3}{2} \times \binom{4}{2} = 18$$

(choix des numéros des 2 zones, choix des 2 positions pour le premier numéro de zone choisi). Ainsi $\mathbf{P}(A) = \frac{18}{81}$.

7 — Soit C l'évènement de l'énoncé. On remarque que

$$\overline{C} = \{N_1 \geq 3\} \cup \{N_2 \geq 3\} \cup \{N_3 \geq 3\} \cup A$$

Cette réunion étant disjointe,

$$\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(\overline{C}) = 1 - 3 \times \frac{9}{81} - \frac{18}{81} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}.$$

■■ *Solution (Problème 15)*

Partie I— Rang d'apparition de la première boule bleue.

1 — Voir cours.

2 — Notons, pour $k \in \mathbf{N}^\star$, B_k l'évènement « une boule bleue est tirée au tirage k ». Alors,

$$\mathbf{P}(L_n) = \mathbf{P}\left(B_1{}^{\mathsf{C}} \cap \cdots \cap B_{n-1}{}^{\mathsf{C}} \cap B_n\right) = \mathbf{P}\left(B_n \middle| B_1{}^{\mathsf{C}} \cap \cdots \cap B_{n-1}{}^{\mathsf{C}}\right) \mathbf{P}\left(B_{n-1}{}^{\mathsf{C}} \middle| B_1{}^{\mathsf{C}} \cap \cdots \cap B_{n-2}{}^{\mathsf{C}}\right) \ldots \mathbf{P}\left(B_2{}^{\mathsf{C}} \middle| B_1{}^{\mathsf{C}}\right) \mathbf{P}\left(B_1{}^{\mathsf{C}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{4}\frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{(n+1)(n+2)}.}$$

3 — Ici, inutile de faire appel au critère de comparaison puisque l'on sait calculer la somme partielle. En effet, soit $n \in \mathbf{N}^\star$, alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(L_k) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La convergence de la série étudiée en découle, et $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(L_n) = 1.}$

4 — On cherche $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} L_n\right)$. Comme les évènements L_n sont disjoints, la probabilité cherchée est, par propriété d'additivité dénombrable :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(L_n) = 1.}$$

Nous tirerons donc presque-sûrement une boule bleue au cours de l'expérience.

Partie II— Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

5 — La variable X_1 suit une loi $\mathcal{B}(2/3)$. Elle est donc d'espérance $2/3$ et de variance $\frac{2}{9}$.

6 — La variable aléatoire S_n est À valeurs dans $\boxed{[\![0\,,\,n]\!].}$

7 — On a de manière évidente $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$

8 — On se fixe dans cette question $n \in \mathbf{N}^\star$ et $k \in [\![0\,,\,n]\!]$.

8.1. On utilise comme précédemment la formule des probabilités composées À l'intersection ci-dessous.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n\right) &= \frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)} \cdots \frac{2}{4+k}\frac{1}{3+k}\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)} \cdots \frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3} \\ &= \boxed{\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}}.\end{aligned}$$

8.2. Les probabilités $\mathbf{P}\left(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n\right)$ dépendent uniquement du nombre de R_i présents, et du nombres de B_i présents pour $i \in [\![0\,,\,n]\!]$. En revanche, elles ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les évènements apparaissent (un ordre différent ne fera que changer l'ordre des fractions apparaissant dans la question précédente). Autrement dit, l'évènement $\{S_n = k\}$ s'écrit comme une réunion disjointe d'évènements de même probabilité, et au nombre $\binom{n}{k}$ (le nombre de façons de placer les k tirages de rouge parmi les n). D'où la formule de l'énoncé.

Ainsi $\mathbf{P}\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k}\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \boxed{\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}}$ après simplifications.

9 — Comme $S_n(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!]$, la variable aléatoire S_n admet forcément une espérance, et nous avons

$$\mathbf{E}\left(S_n\right) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\frac{n(n+1)}{2}\frac{2(n+2)}{3} = \boxed{\frac{2n}{3}}.$$

■■ Solution (Exercice 18)

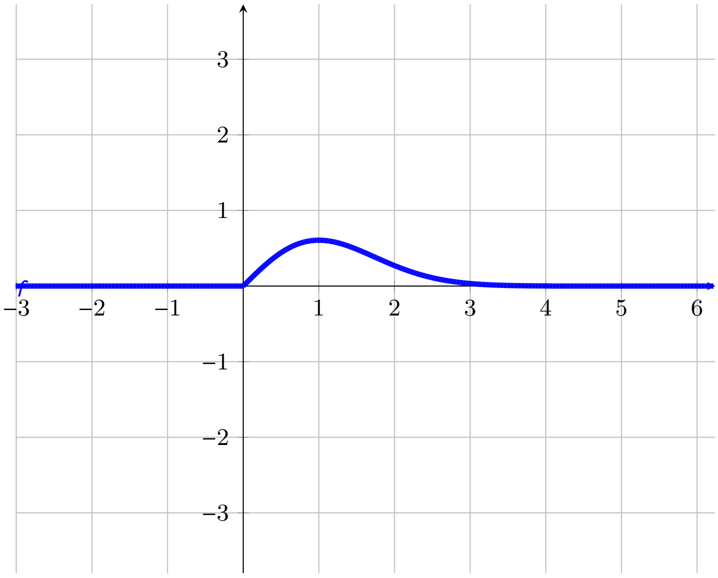
1 — La fonction f est définie par deux formules différentes, une pour $\mathbf{R}_-$ et une pour $\mathbf{R}^{+\star}$; on constate qu'elle est continue en 0 puisque $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0 = \lim_{t\to 0^-} f(t)$.

La fonction f est constante sur $\mathbf{R}_-$. Il y a seulement À l'étudier sur $\mathbf{R}^{+\star}$, où elle est définie par $f(t) = \frac{t}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ comme produit de fonctions qui le sont, et sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)} + \frac{t}{c^2} \times \left(-\frac{2t}{2c^2}\right) \times e^{-t^2/(2c^2)} \\ &= \left(\frac{c^2-t^2}{c^4}\right)e^{-t^2/(2c^2)}\end{aligned}$$

Cette dérivée est du signe de $c^2 - t^2$, donc positive pour $0 < t \le c$ et négative pour $t \ge c$. La fonction f est donc croissante jusqu'À c, puis décroissante. Elle admet donc un maximum en c, qui vaut $f(c) = \frac{1}{c}e^{-1/2}$.

En $+\infty$, on a une forme indéterminée du type $+\infty \times 0$; on pose, pour $t > 0$, $x = t^2/(2c^2)$, ce qui donne $t = c\sqrt{2}\sqrt{x}$, et $f(t) = \frac{c\sqrt{2}\sqrt{x}}{c^2}e^{-x}$; on a alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{c}\sqrt{x}e^{-x} = 0$ par croissance comparée. Par exemple, pour $c = 1$, nous obtenons :



2 — Il s'agit de vérifier trois points :

✓ que la fonction f est positive : c'est visiblement le cas ;

✓ qu'elle est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points : c'est le cas, elle est même continue sur **R** tout entier ;

✓ et que son intégrale sur **R** converge et vaut 1, on le vérifie : sous réserve de convergence, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}dt \\ &= \left[-e^{-t^2/(2c^2)}\right]_0^{+\infty} \\ &= -0+1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

3 — 3.1. Cette intégrale vaut $\sqrt{2\pi}$ d'après le cours.

3.2. On fait le changement de variable $u(t) = t/c$, possible car u est une fonction de t de classe C^1 et strictement monotone ; on a $\mathrm{d}u = 1/c\,\mathrm{d}t$, et $u(0) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$. D'après le théorème de changement de variable dans les intégrales généralisées, les intégrales suivantes sont de même nature, et de même valeur si elles convergent :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/(2c^2)}dt &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\times c\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\times c\,\mathrm{d}u \quad \text{par parité} \\ &= c\sqrt{2\pi}/2\end{aligned}$$

Donc l'intégrale proposée converge, et vaut $\boxed{c\sqrt{\pi/2}.}$

3.3. La variable X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} t\times\frac{t}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On réalise une intégration par parties : toutes les fonctions écrites sont bien continues, et on a donc sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \left[t\times\left(-e^{-t^2/(2c^2)}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 1\times e^{-t^2/(2c^2)}dt$$

Le premier terme converge par croissance comparée, le deuxième converge d'après la question précédente ; donc $\boxed{\text{X admet bien une espérance.}}$ La valeur n'est pas demandée mais on l'a sous les yeux : $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = 0 + c\sqrt{\pi/2}$.

4 — On suppose que X^n admet une espérance, et on utilise le théorème de transfert pour montrer que X^{n+2} admet alors une espérance. Toutes les fonctions écrites sont positives sur $\mathbf{R}^+$ donc la convergence, si elle a lieu, est absolue. On a donc, sous réserve de convergence, et grÀ¢ce À une intégration par parties analogue À la précédente :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{X}^{n+2}) &= \int_0^{+\infty} t^{n+2}\times\frac{t}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^{n+2}\times\left(-e^{-t^2/(2c^2)}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}(n+2)t^{n+1}\times e^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^{n+2}\times\left(-e^{-t^2/(2c^2)}\right)\right]_0^{+\infty} + (n+2)c^2\int_0^{+\infty} t^n\times\frac{t}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le premier terme converge par croissance comparée, et vaut 0. Le deuxième terme converge par hypothèse, et vaut $(n+2)c^2\mathbf{E}(\mathrm{X}^n)$. Donc X^{n+2} admet une espérance, et cette espérance est égale À $(n+2)c^2\mathbf{E}(\mathrm{X}^n)$.

5 — ■ ***Initialisation.*** Pour $n = 0$, il s'agit de montrer que $\mathbf{E}(\mathrm{X}^0) = 2^0c^00!$ *i.e.*que $\mathbf{E}(1) = 1$: c'est vrai ; et que $\mathbf{E}(\mathrm{X}^1) = \sqrt{2\pi}\frac{1!c^1}{2^11!}$; on a vu en 3)3) que $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = c\sqrt{2\pi}/2$, ce qui est bien la valeur voulue. ■ ***Hérédité.*** Supposons les deux relations vraies. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^{2n+2}) &= c^2(2n+2)\mathbf{E}(X^{2n})\\ &= c^2(2n+2)2^n c^{2n} n!\\ &= c^{2n+2}2(n+1)2^n n!\\ &= c^{2n+2}2^{n+1}(n+1)!\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^{2n+3}) &= c^2(2n+3)\mathbf{E}(X^{2n+1})\\ &= c^2(2n+3)\sqrt{2\pi}\frac{(2n+1)!c^{2n+1}}{2^{n+1}n!}\\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{(2n+2)2^{n+1}n!}\\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{2(n+1)2^{n+1}n!}\\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{2^{(n+1)+1}(n+1)!}\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, les deux formules sont donc vraies pour tout entier naturel n.

6 — 6.1. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux, et soit a un réel strictement positif. Alors on a :

$$\mathbf{P}(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbf{Var}\,(X)}{a^2}$$

6.2. On a $\mathbf{E}\,(X^2) = 2^1c^21! = 2c^2$ d'après la question 5), d'où

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}\,(X) &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2\\ &= 2c^2 - (c\sqrt{\pi/2})^2\\ &= c^2(2-\pi/2)\\ &= c^2\frac{4-\pi}{2}\end{aligned}$$

6.3. On transforme l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour avoir une probabilité « supérieure À » plutÀ´t que « inférieure À » :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbf{Var}\,(X)}{a^2} &\iff \mathbf{P}(X - E(X) \geq a \text{ ou } X - E(X) \leq -a) \leq \frac{\mathbf{Var}\,(X)}{a^2}\\ &\iff 1 - \mathbf{P}(X - E(X) < a \text{ et } X - E(X) > -a) \leq \frac{\mathbf{Var}\,(X)}{a^2}\\ &\iff 1 - \mathbf{P}(E(X) - a < X < E(X) + a) \leq \frac{\mathbf{Var}\,(X)}{a^2}\\ &\iff \mathbf{P}\,(X \in]E(X) - a, E(X) + a[) \geq 1 - \frac{\mathbf{Var}\,(X)}{a^2}\end{aligned}$$

Pour a fixé, si on pose $\alpha = \mathbf{E}(X) - a$ et $\beta = \mathbf{E}(X) + a$, on a donc $\mathbf{P}(X \in]\alpha, \beta[) \geq 1 - \frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}$; et c'est encore vrai avec l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$ puisque la probabilité qu'une variable À densité prenne une valeur réelle donnée est nulle.
Pour avoir $\mathbf{P}(X \in]\alpha, \beta[) \geq 99\%$, il suffit donc d'avoir $1 - \frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2} \geq 99\%$; on simplifie :

$$\begin{aligned}1 - \frac{\mathbf{Var}\,(X)}{a^2} \geq 99\% &\iff \frac{\mathbf{Var}\,(X)}{a^2} \leq 0,01\\ &\iff a^2 \geq 100\mathbf{Var}\,(X)\\ &\iff a \geq 10\sigma(X)\end{aligned}$$

On peut donc prendre

$$\alpha = \mathbf{E}(X) - 10\sigma(X) = c\sqrt{\pi/2} - 10c\sqrt{\frac{4-\pi}{2}};\ \beta = \mathbf{E}(X) + 10\sigma(X) = c\sqrt{\pi/2} + 10c\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}.$$

7 —
$$\mathbf{P}(X \in [0,\gamma]) = \int_0^\gamma \frac{t}{c^2} e^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t^2/(2c^2)}\right]_0^\gamma = 1 - e^{-\gamma^2/(2c^2)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \in [0,\gamma]) = 99\% \quad &\iff \quad 1 - e^{-\gamma^2/(2c^2)} = 99\% \\
&\iff \quad e^{-\gamma^2/(2c^2)} = 0,01 \\
&\iff \quad -\gamma^2/(2c^2) = \ln(1/100) \\
&\iff \quad \gamma^2 = 2c^2 \ln(100) = 4c^2 \ln(10) \\
&\iff \quad \gamma = 2c\sqrt{\ln(10)}
\end{aligned}$$

8 — D'après l'inégalité donnée par l'énoncé, on a $\alpha < 0$; on a donc, puisque la densité de X est nulle sur $\mathbf{R}_-$,

$$\mathbf{P}(X \in [\alpha,\beta]) = \mathbf{P}(X \in [0,\beta]) \geq 99\% = \mathbf{P}(X \in [0,\gamma])$$

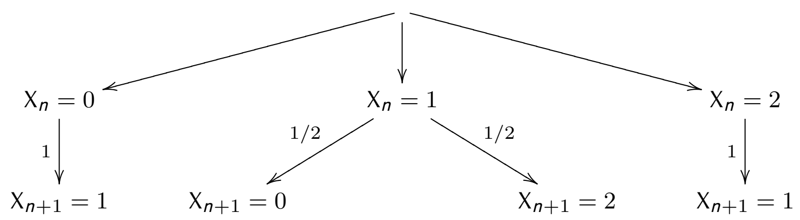
soit, en notant F la fonction de répartition de X :
$$F(\beta) \geq F(\gamma).$$
Or les fonctions de répartition sont croissantes, donc $\beta \geq \gamma$.
L'intervalle $[0,\gamma]$ est donc inclus dans l'intervalle $[\alpha,\beta]$.

■■ *Solution (Problème 18)*

Partie I— Matrice de transition.

1 — **1.1.** Avec $N = 2$, on a $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \end{pmatrix}$.

On considère l'arbre de probabilité suivant :



Justification des probabilités écrites sur les arrètes de l'arbre.

- ✓ Lorsque $X_n = 0$, l'urne U_1 ne contient aucune boule, or le nombre tiré est 1 ou 2 (nombre entre 1 et N dans le cas général), donc on déplacera forcément une boule de l'urne U_2 vers l'urne U_1, et X_{n+1} prend la valeur 1.
- ✓ Lorsque $X_n = 1$, l'urne U_1 contient une boule, donc si on fait 1 (probabilité 1/2), cette boule est déplacée vers l'urne U_2 et X_{n+1} prend alors la valeur 0, sinon (probabilité 1/2 aussi), c'est la boule de l'urne U_2 qui vient dans l'urne U_1 et X_{n+1} vaudra 2.
- ✓ Lorsque $X_n = 2$, on déplace forcément une boule de l'urne U_1 vers l'urne U_2 donc X_{n+1} prend la valeur 1.

D'où, par la formule des probabilités totales appliquées trois fois pour le système complet d'évènements $\{X_n = i\}_{i \in [\![0\,,\,2]\!]}$.

- ✓ $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1)$;
- ✓ $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 2)$;
- ✓ $\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1)$.

Ces trois égalités correspondent bien au produit matriciel $Y_{n+1} = A.Y_n$, avec la matrice A annoncée.
$\boxed{\text{D'où } Y_{n+1} = AY_n.}$

1.2. On va déterminer le spectre de A_2. On sait qu'un réel λ est valeur propre de A_2 si et seulement si le rang de $A_2 - \lambda I_3$

est strictement inférieur À 3 ; on détermine ce rang par pivot. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
A_2 - \lambda I_n &= \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda(1-\lambda^2) \end{pmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_3 - 2\left(\frac{1}{2} - \lambda^2\right) L_2
\end{aligned}$$

Donc $\text{Rg}(A_2 - \lambda I_3) < 3 \iff \lambda = 0$ ou $1 - \lambda^2 = 0$. Le spectre de A_2 est donc $\{0; 1; -1\}$. La matrice A_2 est d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes : $\boxed{\text{elle est donc diagonalisable}}$. On ne demande pas de déterminer les espaces propres pour le moment, on s'arrête donc ici !

2 — Notons $(a_{i,j})$ les coefficients de la matrice A, avec i et j entiers entre 0 et N. On va montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $Y_{n+1,k} = \sum_{j=0}^{N} a_{k,j} Y_{n,j}$ (c'est la formule du produit matriciel). On distingue les valeurs $k = 0$ et $k = N$ des autres, car ce sont des cas particuliers (comme on a vu avec $N = 2$). Pour tout entier n, on notera D_n le résultat du tirage aléatoire de l'entier qui permet de réaliser le n-ième échange ; et on notera $U_1 \leftrightarrow U_2$ et $U_2 \leftrightarrow U_1$ *resp.* le fait de déplacer une boule de l'urne U_1 vers l'urne U_2 ou de l'urne U_2 vers l'urne U_1.

✓ Pour $k = 0$: l'événement $X_{n+1} = 0$ ne peut se produire que si $X_n = 1$ (il faut vider l'urne U_1), on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbf{P}(X_n = 1) \cap (U_1 \leftrightarrow U_2) \\
&= \mathbf{P}(U_1 \leftrightarrow U_2 | X_n = 1)\, \mathbf{P}(X_n = 1) \\
&= \mathbf{P}(D_{n+1} = 1) \mathbf{P}(X_n = 1) \\
&= \frac{1}{N} Y_{n,1}
\end{aligned}$$

C'est bien l'égalité voulue pour démontrer l'égalité matricielle au niveau de la première ligne (ligne $k = 0$).

✓ Pour $k = N$: l'événement $X_{n+1} = N$ ne peut se produire que si $X_n = N - 1$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = N) &= \mathbf{P}\left((X_n = N-1) \cap (U_2 \leftrightarrow U_1)\right) \\
&= \mathbf{P}(U_2 \leftrightarrow U_1 | X_n = N-1)\, \mathbf{P}(X_n = N-1) \\
&= \mathbf{P}(D_{n+1} = N) \mathbf{P}(X_n = N-1) \\
&= \frac{1}{N} Y_{n,N-1}
\end{aligned}$$

ce qui correspond bien aux coefficients de la dernière ligne de A.

✓ Pour $1 \leq k \leq N - 1$: l'événement $X_{n+1} = k$ ne peut se produire que si $X_n = k - 1$ ou $X_n = k + 1$ (on ne peut ajouter ou enlever qu'une boule À chaque étape), on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbf{P}(((X_n = k-1) \cap (U_2 \leftrightarrow U_1)) \cup ((X_n = k+1) \cap (U_1 \leftrightarrow U_2))) \\
&= \mathbf{P}((X_n = k-1) \cap (U_2 \leftrightarrow U_1)) + \mathbf{P}((X_n = k+1) \cap (U_1 \leftrightarrow U_2))) \\
&= \mathbf{P}(U_2 \leftrightarrow U_1 | X_n = k-1)\, \mathbf{P}(X_n = k-1) + \mathbf{P}(U_1 \leftrightarrow U_2 | X_n = k+1)\, \mathbf{P}(X_n = k+1) \\
&= \mathbf{P}(D_{n+1} \in [\![k\,,\, N]\!]) \mathbf{P}(X_n = k-1) + \mathbf{P}(D_{n+1} \in [\![1\,,\, k+1]\!]) \mathbf{P}(X_n = k+1) \\
&= \frac{N-k+1}{N} Y_{n,k-1} + \frac{k+1}{N} Y_{n,k+1}.
\end{aligned}$$

Là encore, on reconnaît les coefficients de A : les $\frac{N-(k-1)}{N}$ sous la diagonale, et les $\frac{k+1}{N}$ au-dessus.

On a donc bien montré que $Y_{n+1} = A.Y_n$, en étudiant chaque ligne de cette égalité matricielle.

3 — Notons F_1 l'espace propre associé À la valeur propre 1 de ${}^{\mathbf{T}}A$.

✓ Cas $N=2$: ${}^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; on sait que $F_1 = \mathrm{Ker}({}^{\mathsf{T}}A - I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1 \iff \begin{cases} -x+y=0 \\ (1/2)x - y + (1/2)z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$

Ainsi, $\boxed{F_1 = \mathrm{Vect}((1,1,1)).}$

✓ Cas $N=3$:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$; ${}^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ${}^{\mathsf{T}}(A - I_4) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a donc :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F_1 \iff \begin{cases} -x+y=0 \\ (1/3)x - y + (2/3)z = 0 \\ (2/3)y - z + (1/3)t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = z \\ (2/3)y - z + (1/3)t = 0 \\ z = t \end{cases} \iff x = y = z = t.$

Ainsi, $\boxed{F_1 = \mathrm{Vect}((1,1,1,1))}$.

4 — On peut conjecturer que le vecteur V_1 dont toutes les coordonnées sont égales À 1 est vecteur propre de ${}^{\mathsf{T}}A$ pour la valeur propre 1 ; pour le vérifier, il faut montrer que ${}^{\mathsf{T}}A.V_1 = V_1$, ce qui est équivalent, en transposant, À ${}^{\mathsf{T}}V_1.A = {}^{\mathsf{T}}V_1$. On peut remarquer que les coordonnées du vecteur ${}^{\mathsf{T}}V_1.A$ sont les sommes des coefficients des colonnes de A (du fait que toutes les coordonnées de V_1 sont égales À 1). Or on voit sur la matrice A que la somme des coefficients de la colonne j vaut :

✓ 1 pour $j=0$ et $j=N$ car ces colonnes ont un seul coefficient non nul et il vaut 1 ;

✓ $j/N + (N-j)/N$, soit encore 1, pour j entre 1 et $N-1$.

Donc on a bien ${}^{\mathsf{T}}V_1.A = {}^{\mathsf{T}}V_1$, et donc 1 est valeur propre pour ${}^{\mathsf{T}}A$, avec V_1 pour vecteur propre.

5 — La matrice ${}^{\mathsf{T}}A - I_{N+1}$ n'est pas inversible puisque son noyau est l'espace propre associé À la valeur propre 1 de ${}^{\mathsf{T}}A$, et donc il n'est pas réduit À $\{0\}$. Or ${}^{\mathsf{T}}A - I_{N+1} = {}^{\mathsf{T}}(A - I_{N+1})$ donc cette matrice n'est pas inversible.
On sait qu'une matrice est inversible si et seulement si sa transposée l'est, donc $A - I_{N+1}$ est aussi non inversible, donc son noyau n'est pas réduit À $\{0\}$, et donc 1 est valeur propre de A.

Partie II— Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n.

6 — La variable $X_{n+1} - X_n$ est la variation du nombre de boules dans l'urne U_1 ; or le nombre de boules dans cette urne ne peut qu'augmenter ou diminuer de 1, donc $\boxed{\text{la variable } X_{n+1} - X_n \text{ ne peut prendre que les valeurs } 1 \text{ et } -1.}$

7 — On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet proposé par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n) &= 1 \times \mathbf{P}(X_{n+1} - X_n = 1) + (-1) \times \mathbf{P}(X_{n+1} - X_n = -1) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(U_2 \leftrightarrow U_1 | X_n = k)\, \mathbf{P}(X_n = k) - \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(U_1 \leftrightarrow U_2 | X_n = k)\, \mathbf{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(D_{n+1} \geq k+1 | X_n = k)\, \mathbf{P}(X_n = k) - \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(D_{n+1} \leq k | X_n = k)\, \mathbf{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} (\mathbf{P}(D_{n+1} \geq k+1 | X_n = k) - \mathbf{P}(D_{n+1} \leq k | X_n = k)\, \mathbf{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{N-k}{N} - \frac{k}{N} \right) \mathbf{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(1 - 2\frac{k}{N} \right) \mathbf{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(X_n = k) - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N} k\mathbf{P}(X_n = k) \\
&= 1 - \frac{2}{N} \mathbf{E}(X_n).
\end{aligned}$$

8 — Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbf{E}(X_{n+1}) - \mathbf{E}(X_n) = 1 - \frac{2}{N}\mathbf{E}(X_n)$, d'où $\mathbf{E}(X_{n+1}) = 1 + (1 - \frac{2}{N})\mathbf{E}(X_n)$. On reconnaaît une suite arithmético-géométrique. On utilise une des méthodes du cours pour trouver l'expression de $\mathbf{E}(X_n)$: on commence par chercher un réel ℓ tel que $\ell = 1 + (1 - \frac{2}{N})\ell$, on trouve $\ell = \frac{N}{2}$.
On pose $u_n = \mathbf{E}(X_n) - \ell$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbf{E}(X_{n+1}) - \ell \\ &= 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)(u_n + \ell) - \ell \\ &= \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_n \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique, de raison $1 - \frac{2}{N}$. On a donc $u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n u_0$ d'où

$$\boxed{\mathbf{E}\left(X_n\right) = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \left(\mathbf{E}\left(X_0\right) - \frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}}.$$

9 — On a $\left|1 - \frac{2}{N}\right| < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n = 0$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}(X_n) = \frac{N}{2}.$$

Après un grand nombre d'échanges, les effectifs s'équilibrent entre les deux urnes. On pouvait s'y attendre puisque lorsque l'effectif d'une urne est plus grand que celui de l'autre, on a plus de chances de déplacer une boule vers l'urne qui en contient le moins.

Partie III— Recherche d'une probabilité stationnaire.

10 — D'après la matrice A, on a :

$$X \in E_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} (1/N)x_1 = x_0 \\ x_0 + (2/N)x_2 = x_1 \\ ((N-1)/N)x_1 + (3/N)x_3 = x_2 \\ \dots \\ (2/N)x_{N-2} + x_N = x_{N-1} \\ (1/N)x_{N-1} = x_N \end{cases}$$

On va démontrer la relation demandée par récurrence forte sur k. ■ ***Initialisation.*** Pour $k = 0$, la relation est vérifiée, car $\binom{N}{0} = 1$; pour $k = 1$, la première ligne du système ci-dessus donne $x_1 = Nx_0 = \binom{N}{1}x_0$. ■ ***Hérédité.*** Supposons que pour un $k \in [\![0\,,\,N]\!]$ donné, on ait $\forall i \leq k, x_i = \binom{N}{i}x_0$. Sur la ligne $k+1$ du système ci-dessus, on a :

$$\frac{N-(k-1)}{N}x_{k-1} + \frac{k+1}{N}x_{k+1} = x_k$$

d'où :

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \frac{N}{k+1}\left(x_k - \frac{N-k+1}{N}x_{k-1}\right)\\
&= \frac{N}{k+1}\left(\binom{N}{k} - \frac{N-k+1}{N}\binom{N}{k-1}\right)x_0\\
&= \frac{N}{k+1}\left(\frac{N!}{k!(N-k)!} - \frac{N-k+1}{N}\frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!}\right)x_0\\
&= \frac{N}{k+1}\left(\frac{N!}{k!(N-k)!} - \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}\right)x_0\\
&= \frac{N}{k+1}\frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}\left(\frac{N}{k}-1\right)x_0\\
&= \frac{N!}{(k+1)!(N-k)!}(N-k)x_0\\
&= \frac{N!}{(k+1)!(N-k-1)!}x_0\\
&= \binom{N}{k+1}x_0.
\end{aligned}$$

Donc par récurrence, on a bien $x_k = \binom{N}{k}x_0$ pour tout $k \in [\![0\,,\,N]\!]$.

11 — On vient de prouver que E_1 est engendré par le vecteur dont les coordonnées sont les $\binom{N}{k}$ pour $k \in [\![0, N]\!]$. Sa dimension est donc 1.

12 — Par la formule du binÀ´me de Newton, cette somme vaut $(1+1)^N$ c'est-à-dire 2^N.

13 —
- ✓ Existence :
  Le vecteur π dont les coordonnées sont les $\pi_k = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}$ pour $k \in [\![0, N]\!]$ convient : la somme de ses coordonnées vaut 1 d'après la question 3, et il est dans E_1 d'après la question 1, avec $x_0 = \frac{1}{2^N}$.
- ✓ Unicité :
  Un tel vecteur π, étant dans E_1, doit être multiple du vecteur de coordonnées $\binom{N}{k}$, il existe donc un réel x_0 tel que $\forall k \in [\![0\,,\,N]\!] : \pi_k = \binom{N}{k}x_0$. La somme des coordonnées de π vaut alors $x_0 \times 2^N$ d'après la question 3), or elle doit valoir 1, donc $x_0 = \frac{1}{2^N}$.

14 — On reconnaît la loi binomiale de paramètres N et 1/2 : en effet, $P(X_\infty = k) = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k} = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}$.

$\boxed{\text{Son espérance vaut } \frac{N}{2} \text{ et sa variance vaut } N\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{N}{4}.}$

15 — Puisque X_0 suit cette loi, le vecteur Y_0 est dans E_1, donc $A.Y_0 = Y_0$, *i.e.* $Y_1 = Y_0$; par une récurrence immédiate, on a donc $Y_n = Y_0$ pour tout entier n, et donc puisque la loi de X_n est donnée par les coordonnées de Y_n, X_n suit la même loi que X_0. Cela justifie le terme de « probabilité stationnaire » : la probabilité que l'urne U_1 soit dans un état donné ne dépend pas du nombre d'échanges qui ont été effectués. Par exemple, la probabilité que l'urne soit vide est $\frac{1}{2^N}$, À tout instant.

CHAPITRE 2

Préparation aux Oraux

Résumé/Plan

Vous trouverez dans cette partie du polycopié des anciens sujets d'oraux de tous types : des planches hybrides Mathématiques & Informatique pour Agro-Véto, et des planches individuelles par domaine quant à G2E. Je remercie par avance tous les collègues & étudiants ayant bien voulu les partager (que ce soit au lycée ou *via* l'UPA) !
Organisation : 24 heures sont prévues dans l'emploi du temps : 20 heures de passages au tableau sur des planches Agro-Véto, 4 heures seront consacrées aux planches G2E (les étudiants souhaitant en préparer d'avantage peuvent le faire en autonomie, des corrections seront proposées en fin de session)

1 Banque Agro & Véto — Mathématiques & Informatique . . . 38
1.1 Notes sur le fonctionnement de Geogebra . . . 38
1.2 Algèbre & Géométrie . . . 40
1.3 Analyse . . . 44
1.4 Probabilités & Statistiques . . . 48
1.5 Solutions . . . 54
2 Banque G2E — Mathématiques . . . 54
2.1 Algèbre & Géométrie . . . 54
2.2 Analyse . . . 55
2.3 Probabilités & Statistiques . . . 55
2.4 Solutions . . . 57
3 Banque G2E — Informatique . . . 57
3.1 Solutions . . . 58

Il n'y a pas de réussite facile, ni d'échecs définitifs

Marcel Proust

À propos de l'organisation **1 heure** sera allouée à chaque planche Agro-Véto, structurée de la manière suivante :

❶ réflexion commune de la classe sur la planche (15 minutes),
❷ passage du binôme ayant préparé la planche, muni d'un ordinateur (20 minutes — durée au concours),
❸ commentaires sur la prestation, commentaires divers.

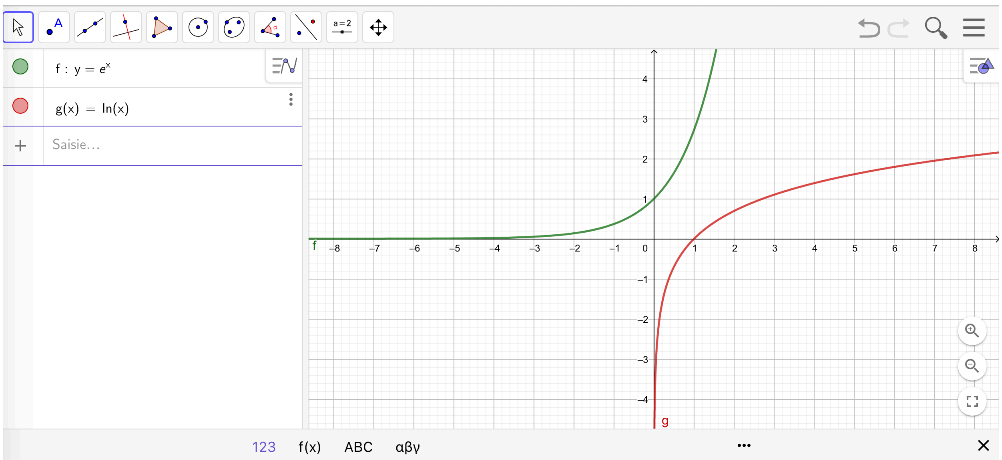
1 Banque Agro & Véto — Mathématiques & Informatique

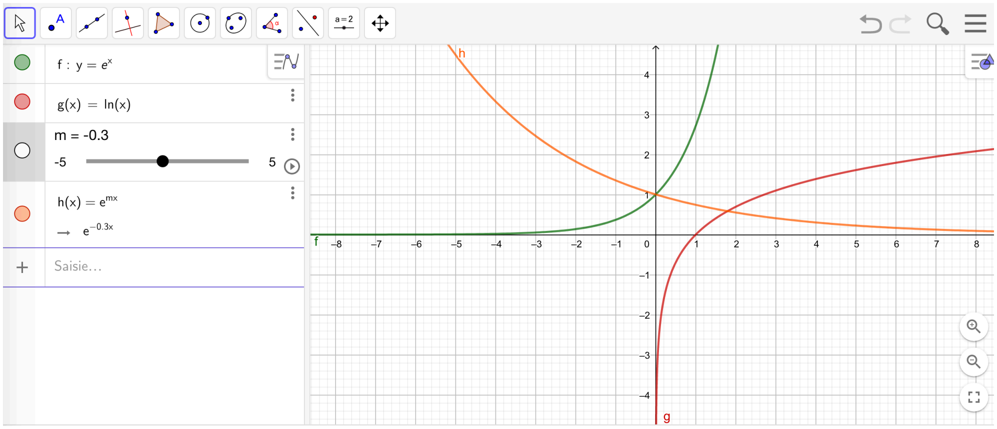
1.1 Notes sur le fonctionnement de Geogebra

Geogebra, en complément de Spyder et Pyzo, est installé sur les postes à disposition le jour du concours. Ce logiciel, très (très très) simple d'utilisation, vous fera gagner une part non négligeable pour les usages suivants : tracer une courbe, tracer des termes de suites, *etc.* (bien plus rapide que l'utilisation de `matplotlib.pyplot`).

- ✓ Tracer une courbe. On tape simplement l'équation de l'objet.
- ✓ Faire varier un curseur pour étudier des courbes dépendant d'un paramètre.

Pour le premier usage, on peut taper par exemple simplement `exp(x)`, ou encore `exp` ou encore `f(x)=exp(x)`, ... Geogebra comprendra que vous lui demandez de tracer la courbe associée. Il est aussi possible de créer des courbes dépendant d'un paramètre (voir capture de droite). Geogebra comprend qu'il s'agit d'un paramètre (les éléments différents du symbole `x`), il vous est possible de faire varier ensuite le paramètre en question.

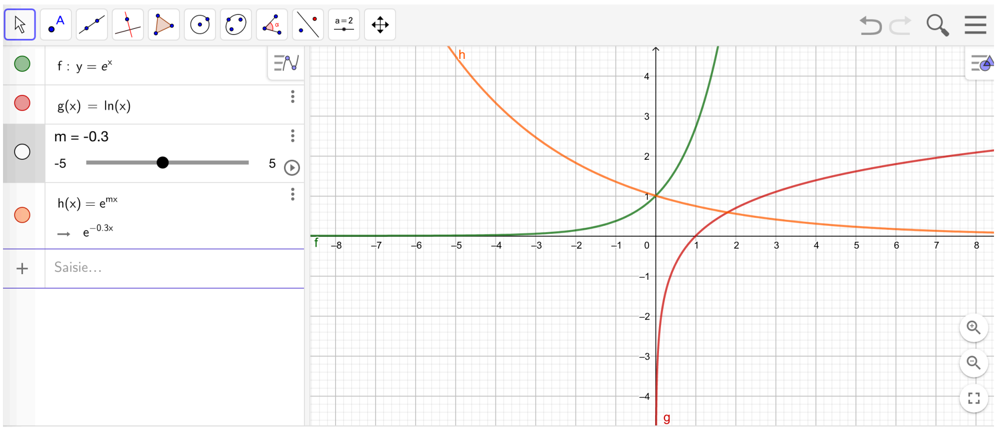




■ **Exemple 1 —** On souhaite savoir si l'équation

$$\frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

pour tout entier n. On peut s'y prendre ainsi :



■

1.2 Algèbre & Géométrie

python La plupart des commandes d'algèbre linéaire numérique (calcul du rang, calcul des valeurs propres/espaces propres) ne sont pas explicitement mentionnées dans les programmes. Les sujets vous les rappelleront toujours, mais il est bon déjà de les connaître avant de se présenter le jour de l'oral !

Remarque 1.1 — La plupart des planches proposent le type `np.array` pour la gestion des matrices. Mais il existe aussi le type `np.matrix`. Pricipale différence : les opérations sont codées autrement avec ce type.

```
>>> import numpy as np
>>> A=np.matrix([[1,2],[2,3]])
>>> B=A*A #plutôt que np.dot() pour le type array de numpy
>>> B
matrix([[ 5,  8],
        [ 8, 13]])
>>> C=np.array([[1,0],[0,2]])
>>> np.linalg.eig(C) #renvoie les éléments propres de C : d'abord les vp ensuite les vecp.
(array([ 1.,  2.]), array([[ 1.,  0.],
       [ 0.,  1.]]))
>>> D=np.array([[1,2],[2,1]])
>>> np.linalg.eigh(D) #renvoie les éléments propres de D SI ELLE EST SYMETRIQUE =>
(array([-1.,  3.]), array([[-0.70710678,  0.70710678],
       [ 0.70710678,  0.70710678]]))
>>> #algorithme optimisé pour ce cas et uniquement celui-ci !
```

[Solution 1] **Exercice 1** ***Agro-Véto, 2018*** Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et Φ définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ par : $\Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}$.

1 — 1.1. Déterminer le lien entre degré de P et degré de $P^{(k)}$.

1.2. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

2 — Soit $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X]) : P \in \mathbf{R}_n[X] \longmapsto P'$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ la matrice canoniquement associée à Φ.

2.1. Écrire la matrice D de Δ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

2.2. python On rappelle que dans le module `numpy` on peut coder des matrices sous forme de tableau de listes en utilisant la commande `np.array`. *Exemple :* `np.array([[1,2,3],[7,8,9]])` code la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. La commande `np.zeros((2,3))` code la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La commande `np.eye(3)` code la matrice identité I_3. La commande `np.dot(A,B)` effectue le produit de la matrice A par B sous réserve qu'elles soient compatibles et codées comme des `array`.
python Coder en langage `Python` la matrice D.

2.3. Montrer que : $A = (I_{n+1} + D)^n$.

2.4. python Écrire une fonction `Phi(coordonneesP)` qui retourne les coordonnées de $\Phi(P)$ sous forme de liste en prenant en argument les coordonnées de P sous forme de liste.

3 — 3.1. Montrer que pour tout polynôme P non nul de $\mathbf{R}_n[X]$ le degré de $\Phi(P)$ est égal à celui de P.

3.2. En déduire que Φ est injective.

3.3. Montrer que Φ est bijective.

4 — 4.1. Montrer que 1 est l'unique valeur propre de Φ et déterminer l'espace propre associé.

4.2. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ? Justifier avec deux arguments différents.

[Solution 2] **Exercice 2** ***Agro-Véto, 2018, Sujet 2*** *On rappelle que dans le package `numpy`, la commande `numpy.transpose(A)` donne la transposée de A, la commande `numpy.linalg.eig(A)` donne les valeurs propres et les vecteurs propres éventuels de A et la commande `numpy.eye(n,n)` crée la matrice I_n et la commande `numpy.ones((n,n))`[1] crée la matrice de taille $n \times n$ ne comportant que des 1.*

1. Notez bien ici le double parenthésage, ceci n'est pas une erreur ! La fonction prend en argument un objet du type `tuple`, et non du type `list`.

Soit $(n,k)\in\mathbf{N}^2$ tels que $n\geq 1$ et $1\leq k\leq n$, on considère une matrice $M=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2=J_n+(k-1)\times I_n$ avec :

$$J_n=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1 — Écrire un programme Python permettant de déterminer, suivant la valeur de n, les valeurs propres de la matrice M^2, ses vecteurs propres et qui permet de vérifier les résultats obtenus. On étudiera, en particulier, le cas $n=3$ et $k=2$.

2 — 2.1. Déterminer, dans le cas général, le rang de J_n.

2.2. Étudier les valeurs propres éventuelles de J_n, et donner la dimension de ses sous espaces propres.

2.3. Justifier, de deux façons différentes, que J_n est diagonalisable.

3 — 3.1. Justifier que M^2 est également diagonalisable.

3.2. Déterminer les valeurs propres de M^2, et donner la dimension de ses sous espaces propres.

4 — Déterminer les valeurs propres possibles de M.

On considère un réseau social comportant n personnes, et tel que chaque couple de deux personnes distinctes ont exactement un ami en commun et que chaque personne a exactement k amis, avec $1\leq k\leq n-1$. Une personne n'est pas amie avec elle-même. On numérote les personnes de 1 à n. On désigne par $A=(A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, la matrice telle que $A_{i,j}=1$ si les personnes i et j sont amies et $A_{i,j}=0$ sinon.

5 — Déterminer un exemple de réseau vérifiant les hypothèses pour $n=3$.

6 — Justifier que A est symétrique.
On admet, que le cœfficient $(A^2)_{i,j}$ avec $i\neq j$, donne le nombre de fois où la personne i a un ami en commun avec la personne j. On admet également que $(A^2)_{i,i}$ donne le nombre d'amis de la personne i.

7 — Donner une expression de la matrice A^2.

8 — 8.1. Donner le nombre de couples comportant deux personnes distinctes du réseau.

8.2. Pour une personne donnée, déterminer le nombre de couples de deux personnes distinctes dont elle est un ami en commun.

8.3. En déduire la relation $k^2-k+1=n$.

9 — 9.1. En déduire les valeurs propres éventuelles de A.

9.2. On sait que $\sum_{i=1}^n n_i\lambda_i=0$ où n_i est la dimension du sous espace propre associée à la valeur propre λ_i et $\operatorname{Spec} A=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, montrer alors que $n=3$.

[Solution 3] ■ **Exercice 3** ***Agro—Véto, 2016, Polynômes de Tchebychev*** On considère la famille de polynômes (T_n) définie par :

$$T_0=1,\quad T_1=X,\quad \forall n\in\mathbf{N},\quad T_{n+2}=2XT_{n+1}-T_n.$$

1 — 1.1. Donner l'expression de T_2 et T_3.

1.2. Pour tout entier naturel $n\in\mathbf{N}$, donner le degré de T_n ainsi que l'expression du coefficient devant le terme de plus haut degré.

1.3. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de chaque coefficient de T_{n+2} en fonction des coefficients de T_{n+1} et de T_n.

2 — 2.1. python On décide de coder un polynôme sous forme d'une liste : celle des coefficients de ce polynôme classés dans l'ordre des degrés croissants. Écrire une fonction qui retourne le degré d'un polynôme.

2.2. Écrire une fonction `etape ( L, M )` qui donne en sortie la liste associée au polynôme $T=2X\times M-L$ où L et M sont des listes définies comme dans la question précédente.

2.3. python Écrire une fonction d'en-tête `def tchebychev (n)` qui, à partir d'un entier n, donne en sortie la liste associée au polynôme T_n.

2.4. Écrire une fonction d'en-tête `def evalue(P,x)` qui, étant donné un polynôme P (défini sous forme d'une liste) et un réel x, évalue ce polynôme en x c'est à dire donne une valeur pour $P(x)$. On essayera de concevoir un algorithme utilisant le moins d'opérations algébriques possible (on se souviendra par exemple de l'algorithme de Hörner vu en TP).

2.5. Écrire une fonction d'en-tête `def TraceTchebychev(n)` qui à partir d'un entier n, trace la représentation graphique du polynôme T n sur l'intervalle $[-1, 1]$. Quelles observations peut-on faire ?

3 — 3.1. Linéariser $\cos a \cos b$ pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

3.2. Pour tout réel a et $n \in \mathbf{N}$, prouver que : $\quad T_n(\cos a) = \cos(na)$.

3.3. Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, montrer que le polynôme T_n admet n racines distinctes, toutes dans $[-1, 1]$.

[Solution 4] ■ **Exercice 4** ***Agro—Véto, 2018, Polynômes interpolateurs de Lagrange*** Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soit ϕ l'application définie par :

$$\phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n+1} \\ Q & \longmapsto & (Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_n)) \end{array} \right. .$$

1 — Montrer que ϕ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

2 — 2.1. Écrire la matrice M de ϕ dans les bases canoniques de $\mathbf{R}_n[X]$ et $\mathbf{R}^{n+1}$.

2.2. La matrice M est-elle inversible ?

Pour tout $i \in [\![0\,,\,n]\!]$, on pose

$$L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

(les L_i sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange*).

3 — 3.1. Montrer que $L_i \in \mathbf{R}_n[X]$.

3.2. Calculer $L_i(x_j)$ pour tout $j \in [\![0; n]\!]$. En déduire $\phi(L_i)$.

3.3. Montrer que la famille $\mathbf{B} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

3.4. Écrire la matrice de ϕ dans la base $\mathbf{B}$ et la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$.

3.5. python Écrire une fonction python qui décrit le polynôme L_i.

4 — Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. On note V la matrice colonne définie par $\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X = x_0) \\ \mathbf{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

4.1. Calculer le produit ${}^{\mathsf{T}}V \times M$ en fonction des moments d'ordre r de X $(0 \leq r \leq n)$.

4.2. Supposons $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2), \dots, \mathbf{E}(X^n)$ connus. Comment remonter à la loi de X ?

4.3. On suppose le module `numpy` importé. Les commandes suivantes sont rappelées :

- ✓ `import numpy as np` pour importer le module `numpy` ;
- ✓ `np.dot(A,B)` renvoie le produit de deux matrices A et B ;
- ✓ `np.linalg.inv(A)` renvoie l'inverse d'une matrice inversible A.

Modéliser le calcul de la loi de X, connaissant $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2), \dots, \mathbf{E}(X^n)$.

[Solution 5] ■ **Exercice 5** ***Agro—Véto, Sujet 1, 2018*** On considère E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ admettant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre et l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5 \right\}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 — python À l'aide d'un programme Python, déterminer la plus petite valeur propre parmi les matrices de F dont les cœfficients sont égaux à 0 ou 1. *On pourra par exemple utiliser la fonction numpy.linalg.eig, comme le montre l'exemple suivant :*

```
import numpy.linalg as la
vap,vep = la.eig ( [ [1 ,2 ], [3 ,4]] )
```

Après cette suite d'instructions, la variable `vap` contient la liste des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et la variable `vep` est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de cette matrice.

2 — 2.1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

2.2. Donner une base de $E \cap F$.

3 — 3.1. Montrer que $A \in E \cap F$.

3.2. Montrer que A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $A = P^{\mathsf{T}}DP$ où ${}^{\mathsf{T}}P$ est la matrice transposée de P.

4 — Vérifier que ${}^{\mathsf{T}}PMP$ est diagonale pour toute matrice M de $E \cap F$.

5 — Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix} y+z & y & x \\ y & x+z & y \\ x & y & y+z \end{pmatrix}$.

[Solution 6] ■ **Exercice 6** ***Agro—Véto, 2016*** On considère $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps discrétisé de quatre manières différentes (en i) au moyen des suites $(a_i(n))_{n \geqslant 0}$ pour $i \in [\![1\,,\,4]\!]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall i \in [\![1\,,\,4]\!], \quad a_i(n+1) = \sum_{j=1}^{4} m_{i,j}\, a_j(n),$$

où $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,,\,4]\!]^2} \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique réelle carrée de format 4×4. On identifiera les matrices colonnes avec les n-uplets.

1 — Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbf{R}^4$, notée $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbf{R}^4$ tels que : $\forall k \in [\![1\,,\,4]\!], \quad ME_k = \lambda_k E_k$.
On suppose dans la suite que $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_4|$.

2 — On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_1(n) \\ \vdots \\ a_4(n) \end{pmatrix}$. Les coordonnées de X_0 dans la base $\mathcal{B}$ sont notées $y_1, \ldots, y_4$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = \sum_{k=1}^{4} y_k \lambda_k^n E_k.$$

3 — Quelle relation matricielle existe-t-il entre les $(a_k(0))_{k\in[\![1\,,\,4]\!]}$ et les $(y_k)_{k\in[\![1\,,\,4]\!]}$?

4 — python On étudie à l'aide de l'outil informatique l'exemple suivant :

$$G = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 22 & 28 \\ 0 & 22 & -28 & -22 \\ 0 & 28 & -22 & 12 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{64}G.$$

Dans l'environnement python on fera l'importation `import numpy.linalg as lin` pour le module d'algèbre linéaire. On rappelle que `lin.eig(A)` renvoie le 2-tuple formé du vecteur des valeurs propres et de la matrice des coordonnées des vecteurs propres de la matrice A. On rappelle aussi que `lin.inv(A)` retourne l'inverse de la matrice A.

4.1. Sous l'environnement python, faire afficher les valeurs propres et les vecteurs E_k pour $k \in [\![1\,,\,4]\!]$ associés à la matrice M.

4.2. On prend $(a_1(0), a_2(0), a_3(0), a_4(0)) = (2, 2, 4, 5)$. Calculer informatiquement les y_k pour $k \in [\![1\,,\,4]\!]$.

5 — python Écrire une fonction Python a prenant en argument un entier n et renvoyant en sortie le vecteur $\begin{pmatrix} a_1(n) \\ \vdots \\ a_4(n) \end{pmatrix}$.

[Solution 7] ■ **Exercice 7** ***Agro—Véto,2017***

1 — python Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}^\star$. Écrire une fonction qui renvoie `True` si $a_i^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et qui renvoie `False` sinon. La fonction aura pour seul paramètre une liste contenant les réels $a_1, \ldots, a_n$.

2 — On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $v = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, et $w = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, et $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbf{R}^3$ admettant pour équation dans la base canonique :

$$y - z = 0.$$

Déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs u, v, w sur le plan $\mathcal{P}$ et vérifier qu'ils ont même norme.

3 — Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}^\star$. On suppose qu'il existe un plan $\mathcal{P}$ tel que les projetés orthogonaux des vecteurs $a_1 e_1, a_2 e_2$ et $a_3 e_3$ sur ce plan aient tous la même norme notée d. On considère $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormée de $\mathcal{P}$ et ε_3 un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de norme 1. On note p la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$.

3.1. Donner une expression de $p(e_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ à l'aide des vecteurs ε_1 et ε_2.

3.2. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a : $\langle e_i | \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle e_i | \varepsilon_2 \rangle^2 = \left(\frac{d}{a_i}\right)^2$.

3.3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}$.

3.4. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $|a_i| \geqslant d$ puis que :

$$a_i^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2.$$

1.3 Analyse

[Solution 8] ■ **Exercice 8** ***Agro—Véto, Sujet 7, 2017*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par la donnée de ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = \frac{1}{3}\left(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}\right).$$

On note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pose : $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1 — python Écrire une fonction Python prenant en argument les trois premiers termes de la suite et renvoyant la liste de ses 100 premiers termes. Utiliser cette fonction pour étudier le comportement asymptotique de la suite sur quelques exemples.

2 — Démontrer que $0 \notin \operatorname{Spec} \mathrm{A}$.

3 — Démontrer que pour tout complexe λ, nous avons : $\lambda \in \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ si et seulement si λ racine de $\mathrm{X}^3 - \frac{1}{3}\mathrm{X}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{X} - \frac{1}{3}$.

4 — Démontrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_3(\mathbf{C})$, et z un complexe tel $|z| < 1$ tels que : $\mathrm{A} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$.

5 — Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n et en déduire une expression en fonction de $n, \mathrm{A}, \mathrm{X}_0$.

6 — Démontrer alors qu'il existe trois complexes a, b, c (que l'on ne demande pas d'expliciter) tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = a + bz^n + c\overline{z}^n.$$

7 — Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|bz^n + c\overline{z}^n\right| = 0$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\left(bz^n + c\overline{z}^n\right)$ et de $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\left(bz^n + c\overline{z}^n\right)$?

8 — En déduire que $a \in \mathbf{R}$ et que : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a.$[4]

[Solution 9] ■ **Exercice 9** ***Agro—Véto, Sujet 5, 2018. Étude de la convergence de deux produits infinis.*** Soit x un réel de l'intervalle $[0; 1[$ fixé. On définit les suites $(f_n(x))_{n\geq 1}$, $(g_n(x))_{n\geq 1}$ et $(h_n(x))_{n\geq 1}$ par :

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 + x^k), \quad g_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 - x^{2k-1}), \quad h_n(x) = f_n(x)g_n(x).$$

On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ et $h(x) = f(x)g(x)$.

1 — Écrire un script Python qui affiche dans un repère les points de coordonnées $(f_n(x); g_n(x))$ lorsque x prend les valeurs $\frac{k}{100}$ avec $k \in \{0; \cdots; 80\}$ et $n = 100$. Faire une conjecture d'une relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$ en admettant leurs existences.

2 — Montrer que pour tout $x \in [0; 1[$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(g_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante.

3 — **3.1.** Établir que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad 1 + t \leq \mathrm{e}^t.$$

En déduire que, pour tout $x \in [0; 1[$, $f(x)$ existe et vérifie :

$$1 \leq f(x) \leq \exp \frac{x}{1-x}.$$

3.2. Montrer que f est continue en 0.

4 — **4.1.** Justifier l'existence de $g(x)$ pour tout $x \in [0; 1[$.

4.2. Montrer que pour tout $t \in [0; 1[$ et $x \in [0; 1[$, $1 - (1-x)^t \geq xt$. *(on pourra étudier une fonction de x ou utiliser la formule des accroissements finis.)*

4.3. En déduire l'encadrement suivant, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right) \leq g(x) \leq \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right),$$

puis la continuité de g en 0.

5 — **5.1.** Montrer que, pour tout $x \in [0; 1[$: $f_n(x^2)g_n(x^2) = f_{2n}(x)g_n(x)$. En déduire que $h(x^2) = h(x)$.

5.2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $h(x^{2^n}) = h(x)$. Conclure alors que pour tout $x \in [0; 1[$, $h(x) = 1$.

5.3. Ce dernier résultat confirme-t-il votre conjecture ?

[Solution 10] ■ **Exercice 10** ***Agro—Véto, Sujet 4, 2018*** Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$(\mathrm{E}_n) : \quad \frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n},$$

où n est un entier strictement positif, et x, l'inconnue, est un nombre réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}.$$

4. On pourrait croire que cette question sort un peu du programme étant donné que la convergence des suites complexes (*i.e.*celle des parties réelles et imaginaires vers une limite finie) ne l'est pas. En fait ce n'est pas le cas (*c.f.*correction) notamment car (u_n) est une suite réelle (récurrence immédiate).

1 — **1.1.** Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
1.2. En déduire que l'équation (E_1) n'admet pas de solution.
1.3. Démontrer que, pour $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet deux solutions, que l'on notera α_n et β_n, telles que :

$$1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n.$$

2 — À l'aide de l'outil informatique, représenter sur un même graphe la courbe représentative de f ainsi que les droites D_i, $1 \leq i \leq 6$, où D_i a pour équation $y = \frac{1}{i}$, pour $i \in [\![1\,,\,6]\!]$.

3 — Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variations et sur les limites des suites $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ et $(\beta_n)_{n\geq 2}$?

4 — On va étudier la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ dans cette question.
4.1. Démontrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement monotone.
4.2. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.
4.3. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = \frac{\beta_n}{n}$. On admet que $\ln(u_n) \underset{n\to\infty}{=} o(\ln(n))$. Prouver alors que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln^2(n)$.
4.4. En déduire un équivalent de $(\beta_n)_{n\geq 2}$.

5 — On s'intéresse dans cette question à la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$.
5.1. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.
5.2. Donner un équivalent de $\alpha_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comment pourrait-on vérifier ce résultat avec l'outil informatique ?

[Solution 11] ■ **Exercice 11** ***Agro—Véto, 2016, Intégration numérique*** Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose :

$$f(x) = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-x\sin t}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{S}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-x\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

1 —
1.1. Écrire une fonction python `Sn` qui prend en entrée des valeurs de x et n et donne en sortie la valeur de $\mathrm{S}_n(x)$.
1.2. Écrire une fonction python `graphe` qui trace le graphe de la fonction S_n sur l'intervalle $[a, b]$, les valeurs de a, b et n étant données en paramètres.

2 — Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, montrer que S_n est dérivable en zéro, et exprimer $\mathrm{S}_n'(0)$ sans symbole Σ.

3 — Pour tout x, montrer que la suite $(\mathrm{S}_n(x))_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est convergente, quelle est sa limite ?

4 — ***(À propos de la fonction f)***
4.1. Soient $x \leqslant y$ deux réels, comparer $f(x)$ et $f(y)$, qu'en conclure ?
4.2. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\sin t}\,\mathrm{d}t.$
4.3. Montrer que : $\forall t \in [0, \pi/2], \quad \sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t,$ en déduire la limite de f end $+\infty$.

[Solution 12] ■ **Exercice 12** ***Agro—Véto, 2015, Méthode numérique pour une équation différentielle*** On considère l'équation différentielle suivante, dans laquelle y désigne la fonction inconnue de la variable x

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x^2}{1+x^2}. \tag{E}$$

1 — ***(Résolution de (E))***
1.1. Décrire l'ensemble des solutions de (E) définies sur $]-\infty; 0[\bigcup]0;\infty[$. <u>*Indication :*</u> *On pourra remarquer l'égalité $x^3 = x(1+x^2) - x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.*
1.2. On appelle solution sur $\mathbf{R}$, toute solution de (E) définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. L'équation (E) admet-elle de telles solutions ? Si oui, exprimer ces solutions, et positionner localement leur courbe représentative par rapport à leur tangente en zéro.
1.3. Résoudre (E) avec la condition de Cauchy $y(1) = \frac{1}{2}$.
1.4. Écrire une fonction Python nommée `solexacte` prenant en paramètre $b \in \mathbf{R}$ et traçant la solution sur un intervalle $[1, b]$.

2 — *(Méthode d'Euler)* Écrire une fonction Python nommée `soleuler` prenant en paramètre $N \in \mathbf{N}$ et qui renvoie les listes des valeurs $(x_i)_{i \in [\![0\,,\,N]\!]}$ et $(y_i)_{i \in [\![0\,,\,N]\!]}$ et qui trace les segments reliant les points (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}) pour $i \in [\![0\,,\,N-1]\!]$. Comparer cette courbe à celle de la solution exacte.

[Solution 13] ■ **Exercice 13** ***Agro—Véto, 2018***

Rappel : algorithme de dichotomie. *On considère une fonction g continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a;b]$ en un point que l'on note α. On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :*

- ✓ $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- ✓ *Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ et :*

$$\text{si } g(a_k)g(c_k) \leq 0, \text{ alors } a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = c_k$$

$$\text{sinon } a_{k+1} = c_k \text{ et } b_{k+1} = b_k$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ convergent toutes les deux vers α.

Pour $n \geqslant 1$, on définit la suite de fonctions (f_n) par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

1 — 1.1. Montrer pour n fixé que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$ notée a_n. Montrer que $a_n > 0$.

1.2. python Écrire une fonction `a(n)` qui calcule une valeur approchée de a_n pour un n donné en utilisant le principe de dichotomie. La tester pour $n = 2$.

1.3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

2 — On pose $u_n = n^2 a_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

2.1. python Écrire un programme qui trace les termes u_n pour $n \in [\![10\,,\,40]\!]$. En déduire une conjecture sur la limite de la suite (u_n).

2.2. Démontrer cette conjecture. En déduire un équivalent de la suite (a_n).

3 — Soit g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2+2}$ pour tout $x \in [0,1]$.

3.1. Montrer que g est croissante sur $[a_2, 1]$.

3.2. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

[Solution 14] ■ **Exercice 14** ***Agro—Véto, 2018*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite décroissante, convergente vers 0.

On définit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$

1 — 1.1. python Écrire une fonction permettant de représenter les termes de la suite (S_n) et conjecturer. On pourra commencer la fonction par le préambule minimal suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

et utiliser a commande `plt.plot(x,y,"o")`.

1.2. Montrer que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

1.3. En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite ℓ.

1.4. Justifier que $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

2 — On pose $u_k = \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

2.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = 0$.

2.2. Montrer que pour tout entier naturel b : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+b+1} = \int_0^1 \frac{x^b}{1+x}\, dx$.

2.3. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \right) = -\ln(2)$.

2.4. python À l'aide des questions 1. et 2., écrire une fonction Python qui donne une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-3} près.

3 — python Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste (correspondant aux éléments d'une suite finie, *i.e.*une famille d'éléments indexée par un ensemble fini) et qui retourne un message de type `str` indiquant si :

- ✓ la suite est géométrique,
- ✓ la suite est arithmétique,
- ✓ la suite est constante,
- ✓ la suite ne possède aucune des propriétés précédentes.

1.4 Probabilités & Statistiques

1.4.1. Aléatoire discret

Dans l'exercice qui suit, il est nécessaire de bien revoir l'intérêt de la loi faible des grands nombres dans l'approximation de probabilités et d'espérances.

[Solution 15] **Exercice 15** ***Agro—Véto, Sujet 8, 2018*** Une urne contient initialement deux boules blanches et deux boules noires. Soit c un entier naturel. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :

- ✓ On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête Là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore c boules noires dans l'urne.
- ✓ On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche), ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ». Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

1 — Que dire de la loi de X si $c = 0$? Calculer $\mathbf{P}(X = 3)$ en fonction de c pour c quelconque.

2 — python

2.1. Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument la valeur de c et un entier naturel s. Cette fonction doit simuler l'expérience ci-dessus, avec un nombre maximal de tirages égal à s. Elle doit renvoyer le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon.

2.2. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grand nombre de fois l'expérience pour donner une estimation de $\mathbf{P}(X = 0)$ pour $c = 1$, $c = 2$ et $c = 5$.

3 — Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\quad \mathbf{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}.$

4 — On suppose dans cette question que $c = 1$.

4.1. Calculer $\mathbf{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n non nul. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X = 0)$.

4.2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \mathbf{P}(X = n) = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

4.3. En utilisant le théorème du transfert, démontrer que la variable aléatoire $X + 3$ admet une espérance, et calculer cette espérance. En déduire l'espérance de X.

4.4. python Utiliser la fonction de la question 2.1 pour vérifier ce résultat à l'aide de simulations.

5 — On suppose dans cette question que $c = 2$.

5.1. Calculer $\mathbf{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n non nul. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X = 0)$.

5.2. Donner la loi de X. La variable X admet-elle une espérance ?

6 — Dans cette question, c est un entier naturel non nul quelconque.

6.1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ -\ln(\mathbf{P}(E_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+\frac{2}{2+kc})$.

6.2. Déterminer alors la valeur de $\mathbf{P}(X=0)$. *On pourra pour cela utiliser sans démonstration le résultat suivant : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives et si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ ont même nature.*

[Solution 16] ■ **Exercice 16** ***Agro—Véto, 2017*** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire aléatoirement une par une et sans remise les n boules. À chaque tirage, on définit le « record » comme étant le plus grand numéro obtenu jusque Là.
Pour chaque entier $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, on note $Y_{k,n}$ la v.a.r. qui vaut 1 si le k-ième tirage est un record (autrement dit si le k-ième numéro tiré est supérieur aux précédents) et 0 sinon.

1 — 1.1. Écrire une fonction `tirage(n)` qui simule le tirage des n boules.
Rappel : la fonction `shuffle` du module `random` permet de mélanger aléatoirement les éléments d'une liste.

1.2. Écrire une fonction Python `maximum(L)` qui retourne le maximum d'une liste L passée en argument.

1.3. Écrire une fonction Python `simuleY(k,n)` qui simule $Y_{k,n}$.

1.4. Que retourne la fonction `f(k,n)` suivante ? Que permet-elle d'évaluer ?

```
def f(k,n):
    N = 10000
    li = [simuleY(k,n) for i in range(N)]
    return sum(li)/N
```

1.5. En choisissant différentes valeurs de k, conjecturer au sujet de $\mathbf{P}(Y_{k,n}=1)$. Démontrer le résultat précédent.

2 — On note B_n le nombre de fois où l'on a obtenu un record au cours des n tirages.

2.1. Exprimer B_n en fonction des $Y_{k,n}$, $1 \leq k \leq n$. En déduire $\mathbf{E}(B_n)$.

2.2. En utilisant les dénombrements, calculer $\mathbf{P}(B_n=1)$ et $\mathbf{P}(B_n=n)$.

2.3. Montrer que pour tout $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(B_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3 — Pour $i \neq j$, calculer $\mathbf{P}[(Y_{i,n}=1)\cap(Y_{j,n}=1)]$. Les variables aléatoires réelles $Y_{i,n}$ et $Y_{j,n}$ sont-elles indépendantes ?

[Solution 17] ■ **Exercice 17** ***Agro—Véto, Sujet 9, 2018*** On s'intéresse à l'évolution d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème donné répondant au modèle suivant. L'évolution est supposée réalisée par étapes successives, suivant chacune le même fonctionnement ; à chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres peut :

- ✓ soit donner lieu à une fission binaire, et se diviser en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité $\frac{2}{3}$;
- ✓ soit mourir et se désintégrer avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes après la n-ième étape. Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie dans l'écosystème, et on note $X_0 = 1$.

1 — Donner la loi et l'espérance de X_1.

2 — 2.1. Pour $n \geq 1$, justifier que X_n ne prend que des valeurs paires. Expliciter $X_n(\Omega)$.

2.2. python Écrire un programme informatique prenant en argument la valeur de n, et retournant les valeurs d'une simulation de $(X_1; X_2; \cdots; X_n)$.

2.3. Soit i tel que $2i \in X_n(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 2i]$.

3 — Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit la fonction G_n par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ G_n(x) = \sum_{k\in X_n(\Omega)} x^k P(X_n = k) \quad \textit{(avec } 0^0 = 1 \textit{ par convention)}$$

et on admet que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ G_{n+1} = G_n \circ G_1 = G_1 \circ G_n.$$

3.1. Donner les valeurs de $G_n(1)$ et $G_n'(1)$.

3.2. En déduire une relation entre $\mathbf{E}(X_{n+1})$ et $\mathbf{E}(X_n)$.
3.3. Calculer alors l'espérance de X_n en fonction de n.

4 — On note $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = \mathbf{P}(X_n = 0)$, et soit R l'événement « La population de bactéries finit par s'éteindre ».
4.1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $G_{n+1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(G_n(x))^2$.
4.2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_n^2.$$

4.3. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à déterminer.

5 — On note $\forall n \in \mathbf{N}$, D_n l'événement « la population disparaît exactement à l'issue de l'étape n ».
5.1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathbf{P}(D_n) = u_n - u_{n-1}$.
5.2. En remarquant que $R = \cup_{n=1}^{+\infty} D_n$, déterminer alors la probabilité que la population de bactéries s'éteigne.

[Solution 18] ■ **Exercice 18** ***Agro—Véto, 2018*** On rappelle que la fonction `random` de la bibliothèque `random` renvoie un flottant entre 0 et 1. La fonction définie ci-dessous permet de représenter graphiquement la loi d'une variable aléatoire X_n À valeurs dans $[\![0\,,\,n]\!]$ pour $n \in \mathbf{N}$, la quantité `loi` étant la liste

$$[\mathbf{P}(X_n = 0), \mathbf{P}(X_n = 1), \dots, \mathbf{P}(X_n = n)].$$

```python
from matplotlib.pyplot import *
def graphe(loi):
    lx=[i for i in range(len(loi))]
    plot(lx,loi)
    show()
```

On admettra sans la démontrer la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall p \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Un tournoi oppose deux adversaires, que nous nommerons A et B, dans une succession de n combats. Initialement, chaque combattant dispose d'un capital de points, que nous noterons α_0 et β_0. À l'issue d'un combat, le capital du vainqueur augmente de 1, celui du vaincu ne change pas. Si α_n et β_n désignent les capitaux respectifs des deux joueurs À l'issue du n-ième combat, et si A_n (*resp.* B_n) désigne l'événement « A (*resp.* B) remporte le n-ième combat », nous supposerons que la probabilité que le joueur A (*resp.* B) gagne le $(n+1)$-ième combat est

$$\mathbf{P}(A_{n+1} \big| [\alpha_n = a] \cap [\beta_n = b]) = \frac{a}{a+b} \quad \textit{resp.} \quad \mathbf{P}(B_{n+1} \big| [\alpha_n = a] \cap [\beta_n = b]) = \frac{b}{a+b},$$

c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle au capital de points dont dispose le joueur A (*resp.* B). Enfin X_n désignera le nombre de victoires du joeur A À l'issue de n combats.

Partie I— Premier cas : les capitaux initiaux sont égaux À 1.

1 — On suppose ici $\alpha_0 = \beta_0 = 1$.
1.1. Déterminer la loi des variables X_1 et X_2.
1.2. python Rédiger une fonction `simulX` qui reçoit un entier n, simule n combats et renvoie le nombre X_n de victoires du joueur A.

2 — 2.1. Rédiger une fonction `loiX` qui reçoit un entier n et renvoie, sous forme de liste, des valeurs approchées des probabilités $\mathbf{P}(X_n = 0), \mathbf{P}(X_n = 1), \dots, \mathbf{P}(X_n = n)$, obtenues en faisant 10000 simulations de la variable X_n.
2.2. Exécuter cette fonction pour différentes valeurs de n et représenter graphiquement (par exemple à l'aide de la fonction donnée en préambule) les lois correspondantes. Que peut-on conjecturer ?
2.3. Démontrer cette conjecture.

3 — Si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbf{N}$, calculer la probabilité que le joueur A remporte le tournoi à l'issue de n combats, c'est-à-dire qu'il gagne plus de combats que son adversaire à l'issue de ces $2p+1$ combats. Commenter cette réponse.

Partie II— Deuxième cas : les capitaux initiaux sont resp. égaux à a et 1.

On suppose désormais que $\alpha_0 = a$ et $\beta_0 = 1$.

4 — Déterminer la loi de la variable X_3 dans ce cas.

5 — Démontrer que : $\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \dfrac{\binom{a+k-1}{a-1}}{\binom{a+n}{a}}$.
En déduire la probabilité que le joueur A perde le tournoi (c'est-à-dire qu'il remporte moins de victoires que B).

6 — Calculer l'espérance de la variable X_n.

[Solution 19] ■ **Exercice 19** ***Agro—Veto, 2018, Blanche Neige lance un dé équilibré*** Blanche Neige lance un dé équilibré,

✓ si elle obtient 1, elle relance le dé : $\begin{cases} \text{si elle obtient } 1, 2 \text{ ou } 3, \text{ le nain numéro } 1 \text{ lance le dé } D_1 \\ \text{si elle obtient } 4, 5 \text{ ou } 6, \text{ le nain numéro } 7 \text{ lance le dé } D_7 \end{cases}$

✓ si elle obtient 2, le nain numéro 2 lance le dé D_2

✓ etc…

✓ si elle obtient 6, le nain numéro 6 lance le dé D_6.

On note X le numéro du nain qui lance son dé.

1 — Justifier que $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 7) = \frac{1}{12}$ et pour tout $k \in [\![2\,,\,6]\!]$, $\quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{6}$.

2 — python On suppose que le dé numéro i comporte $i-1$ faces blanches et $7-i$ faces noires. On note Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir une face blanche.
Écrire une fonction Python qui simule la loi de X et la loi de Y.

3 — On note B_k l'événement : « on n'obtient que des faces blanches lors des k premiers lancers ». Calculer $\mathbf{P}(B_k)$.

4 — Déterminer $\mathbf{P}(Y = j | X = i)$ puis $\mathbf{E}(Y | X = i)$.

1.4.2. Aléatoire continu

[Solution 20] ■ **Exercice 20** ***Agro—Veto, Sujet 7, 2018*** *On rappelle que si X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité f_X et f_Y alors $X+Y$ est une variable à densité et la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par :*

$$\text{Pour tout réel } t, \quad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u)\,\mathrm{d}u$$

est une densité de $X+Y$.[5] On considère deux variables aléatoires indépendantes : U et V suivant, chacune, la loi uniforme sur $[0;1]$.

1 — Justifier son existence, puis déterminer une densité f de la variable aléatoire U^2, ainsi qu'une densité de V^2.

2 — **2.1.** On considère la variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$. Justifier que Z admet une densité de probabilité, notée h.

2.2. python Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $\mathbf{P}(Z \leq 1)$.

3 — **3.1.** Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $\quad h(x) = \frac{1}{4} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

3.2. Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $\quad h(x) = \frac{1}{4} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$.

3.3. Montrer que, sur $]0;1]$, on a : $h(x) = \frac{\pi}{4}$. <u>*Indication :*</u> *On pourra utiliser le changement de variable* $y = sin^2(u)$)..

3.4. Interpréter graphiquement le résultat en terme d'aire.

5. Attention, ici la formule du produit de convolution est rappelée, mais ce n'est pas toujours le cas !

4 — On considère une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(Y_n)_{n\geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même paramètre $\frac{\pi}{4}$, et on note $S_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

4.1. Soit $\varepsilon > 0$, déterminer, en fonction de n et ε, une majoration de $\mathbf{P}\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$.

4.2. En déduire, à partir de quelle valeur de n, il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.

4.3. Á l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.

5 — Existe-t-il d'autres alternatives pour déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} ?

[Solution 21] ■ **Exercice 21** ***Agro—Véto, Sujet 6, 2018*** ***Rappel : algorithme de dichotomie.*** *On considère une fonction g continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a;b]$ en un point que l'on note α. On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :*

✓ $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

✓ *Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ et :*

$$\text{si } g(a_k)g(c_k) \leq 0, \text{ alors } a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = c_k$$

$$\text{sinon } a_{k+1} = c_k \text{ et } b_{k+1} = b_k$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ convergent toutes les deux vers α.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1 — Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α.

2 — En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à l'aide de Python, justifier que $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

3 — python En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n, deux réels a et b et la fonction f, et qui renvoie α à 10^{-n} près.

4 — Soit Φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(x+1)} & x > \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que Φ est une densité de probabilité.

5 — Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

6 — Montrer que : $\forall t > \alpha, f'(t) = t\Phi(t) - \frac{1}{t^2}$.

7 — Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. Calculer l'espérance de X de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

■ **Exercice 22** ***Agro—Véto, 2016, La seule loi possible à densité à absence de mémoire est l'exponentielle***

[Solution 22] On s'intéresse à la dissolution d'une pastille de chlore. On note T la variable aléatoire correspondant au temps qu'elle met pour se dissoudre. On suppose qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout réel $t \in [0, +\infty[$:

$$\mathbf{P}(t < T < t+h | T > t) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} h\lambda$$

1 — [6] Soit Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1[$; soit $X = \frac{-\ln(1-Y)}{\lambda}$.

1.1. Déterminer la fonction de répartition de X.

1.2. Quelle est la loi de X ? Reconnaître cette loi en et précisant le paramètre.

1.3. python Simuler la loi de X avec un programme Python.

6. Question archi classique ! Déjà faite plusieurs fois en TD

2 — On note F la fonction de répartition de T.

2.1. On admet que $\mathbf{P}(T > 0) = 1$; que vaut F sur $]-\infty, 0]$?. Montrer que :

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} \lambda(1 - F(t)).$$

En déduire que F est dérivable sur $[0, +\infty[$

2.2. Montrer que F est solution de l'équation différentielle sur $[0, +\infty[$: $y' + \lambda y = \lambda$.

2.3. Déterminer F.

2.4. En déduire la loi de T, son espérance et sa variance.

Faisons le lien avec la propriété d'absence de mémoire vue en cours.

✍

1.4.3. Statistiques

[Solution 23] **Exercice 23** ***Agro—Véto, Sujet 3, 2018***

On pourra utiliser pour les programmes `Python` *la fonction* `linalg.matrix_rank()` *du module* `numpy`*, qui permet de déterminer le rang d'une matrice, comme le montre l'exemple suivant :*

```
import numpy as np
A = np. array ( [ [1 ,2 ,1] , [2 ,3 ,2], [3 ,5 ,3]] )
print ( np. linalg . matrix_rank (A) )
```

La dernière ligne affiche le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$*, c'est-à-dire* 2.

On pourra aussi utiliser la fonction `randint()` *du module* `random`*. Pour a et b deux entiers* `randint(a,b)` *retourne un entier équiprobablement entre a et b (a et b étant inclus).* On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1 — **1.1.** Écrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires. *(On pourra représenter les vecteurs par des listes).*

1.2. Écrire une fonction Python `vecteurs_propres(u)` prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'il est un vecteur propre de A.

2 — **2.1.** Vérifier que -1, 1, 2 sont valeurs propres de A et préciser pour chacune un vecteur propre associé.

2.2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3 — Soient $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. On note : $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n^\star = \frac{M_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

3.1. Donner, pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$, l'approximation de la probabilité $P([-\alpha < M_n^\star < \alpha])$ donnée par le théorème central limite.

3.2. En déduire que $\left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au seuil de 95%. *On pourra admettre que, $\forall x \in [0;1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ et si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite, alors $\Phi(1;96) \approx 0,975$.*

4 — On note N_V le nombre de vecteurs propres de A dont les cœfficients sont des entiers de $[\![-5\,,\,5]\!]$.

4.1. Expliquer comment le programme suivant permet d'estimer la valeur de N_V :

```
def simul ():
    u = [ randint ( -5 ,5) for k in range (3) ]
    return vecteurs_propres (u)
n = 10000               # Valeur de n a definir.
nb = 0
for k in range (n):
    if simul ():
        nb += 1
print ( round (nb/n *11**3)) # round (x) = l'entier le plus proche de x.
```

4.2. Comment choisir n pour que l'on soit sûr à 95% de la valeur affichée ?

4.3. Commenter le résultat obtenu.

1.5 Solutions

2 Banque G2E — Mathématiques

2.1 Algèbre & Géométrie

[Solution 24] **Exercice 24** Soit $n \geqslant 2$, on note $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$. Soient a et b deux réels distincts.

1 — Soit $F_a = \{P \in E \text{ tel que } P(a) = 0\}$. Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E. En déterminer une base et sa dimension.

2 — Soit $F = \{P \in E\,,\quad P(a) = P(b) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

3 — On définit $u : P \in E \longmapsto u(P)(X) = P(a)X + P(b)$.

3.1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

3.2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

[Solution 25] **Exercice 25** A tout polynôme P de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, on associe le polynôme $F(P)$ défini par $F(P) = Q$ où

$$Q(X) = P(X) + \frac{1-X}{n}P'(X)$$

1 — Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

2 — Pour k entier entre 0 et $n-1$, on pose $P_k = X^{n-k}$ et $Q_k = F(P_k)$. Exprimer Q_k en fonction de P_k et P_{k-1}.

3 — Donner la matrice de F relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$

4 — L'endomorphisme F est-il diagonalisable ?

[Solution 26] **Exercice 26** Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}},\ \forall n \in \mathbf{N}\quad u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right\}$.

1 — Montrer que E est un **R**-espace vectoriel.

2 — Soit

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array} \right. .$$

Montrer que f est un isomorphisme. En déduire la dimension de E.

3 — Donner trois suites géométriques de E.

4 — En déduire E.

[Solution 27] ■ **Exercice 27** A tout polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$, on associe le polynôme F(P) défini par F(P) = Q où

$$Q(X) = XP(X+1) - (X-1)P(X)$$

1 — Donner degré et coefficient de $F(X^k)$, pour k dans $[\![0\,,\,n]\!]$.

2 — Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

3 — Est-il diagonalisable ?

[Solution 28] ■ **Exercice 28** On définit l'ensemble $\mathcal{C}$ comme l'ensemble des fonctions continues sur $[0;\infty[$. On définit l'application T qui à toute fonction f de $\mathcal{C}$ associe $F = T(f)$, avec :

$$F(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1 — Démontrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

2 — Démontrer que T est injectif.

3 — L'application T est-elle bijective ?

2.2 Analyse

[Solution 29] ■ **Exercice 29** Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et f_n définie sur $\mathbf{R}^-$ par : $f_n(x) = 1 + x - \frac{e^x}{n}$ pour tout $x \in \mathbf{R}^-$.

1 — Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbf{R}^-$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.

2 — **2.1.** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers une limite ℓ.

2.2. Déterminer ℓ.

2.3. Donner un équivalent de $x_n - \ell$ quand $n \to +\infty$.

[Solution 30] ■ **Exercice 30** oit f la fonction définie par $f(x) = e^x - e^{-x}$.

1 — Étudier f. Montrer que f définit une bijection de $\mathbf{R}$ sur J un intervalle que l'on déterminera. *On note g la bijection réciproque dans la suite.*

2 — Sans la calculer, montrer que g est dérivable et que $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ pour tout $x \in J$.

3 — Déterminer maintenant l'expression de g et retrouver l'expression de $g'(x)$ pour tout x de la question précédente.

2.3 Probabilités & Statistiques

[Solution 31] ■ **Exercice 31** Achille et Hector ont chacun une pièce. Achille la lance en premier, puis Hector, puis de nouveau Achille *etc.*, le gagnant est celui qui obtient pile en premier.

1 — On suppose que les deux pièces amènent pile avec la même probabilité $p \in]0,1[$

1.1. Quelle est la probabilité que Achille gagne lors de son n-ième lancer ?

1.2. Quelle est la probabilité que Achille gagne ?

1.3. Le jeu est-il équitable ?

2 — On suppose maintenant que la pièce d'Achille amène pile avec la probabilité $p_1 \in]0,1[$ et celle d'Hector amène pile avec la probabilité $p_2 \in]0,1[$. Pouvez-vous donner une condition sur p_1 et p_2 pour que le jeu soit équitable ?

[Solution 32] ■ **Exercice 32** On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in[\![0\,,\,n]\!]}$ avec $n \in \mathbf{N}$. Ces variables sont indépendantes et suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.
On pose, pour tout k de $[\![0\,,\,n-1]\!]$, $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1 — Calculer $\mathbf{Cov}\,(Y_k, Y_{k+1})$.

2 — Justifier que Y_k et Y_{k+j} sont indépendantes si $j > 1$.

3 — On note $Z = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$. On admet que $\mathbf{Var}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Var}(Y_k) + \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \mathbf{Cov}(Y_i, Y_j)$.
Donner la variance de Z.

[Solution 33] ■ **Exercice 33** On dispose d'une urne comportant $2n$ boules de couleurs différentes. Parmi elles, n sont numérotées de 1 à n, et les n autres portent le numéro 0. On effectue dans cette urne un tirage simultané de n boules.

1 — Pour i entier entre 0 et n, on note X_i la variable indicatrice de l'événement « la boule numéro i est dans la poignée ». Donner la loi de X_i.

2 — Pour $i \neq j$, donner la loi du couple (X_i, X_j) ainsi que la covariance de X_i et X_j.

[Solution 34] ■ **Exercice 34** Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = -1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - p$ avec $p \in [0, 1]$. On pose $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1 — Calculer l'espérance de Z_n.

2 — Déduire de la question précédente la loi de Z_n.

3 — Donner une condition sur p pour que Z_1 et Z_2 soient indépendantes.

[Solution 35] ■ **Exercice 35** On définit la variable X qui correspond au tirage au hasard d'un entier entre 1 et n. Puis si $\{X = k\}$ est réalisé, on tire au hasard un entier entre 1 et k et on note Y le résultat.

1 — **1.1.** Déterminer la loi de X.
1.2. Déterminer la loi de Y.

2 — Calculer l'espérance de Y.

3 — Calculer la covariance de (X, Y).

[Solution 36] ■ **Exercice 36** Une urne contient n boules numérotées de 0 à $n - 1$. On effectue 3 tirages successifs avec remise. On note X, Y et Z les résultats obtenus successivement aux 3 tirages.

1 — Calculer $\mathbf{P}(X + Y = Z)$.

2 — Calculer $\mathbf{P}(X + Y + Z = n - 1)$.

[Solution 37] ■ **Exercice 37** soit T une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ, et a un réel, ainsi que $X = |T| + a$

1 — Donner la fonction de répartition de X en fonction de Φ.

2 — La variable aléatoire X est-elle à densité ? Si oui, en donner une densité .

3 — La variable aléatoire X a-t-elle une espérance ? Si oui, la donner.

[Solution 38] ■ **Exercice 38** ***Transformée de Laplace d'une variable aléatoire réelle à densité*** Soit X une variable aléatoire de densité f, on pose, pour t réel et lorsque c'est possible,

$$L_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} f(x)\,dx.$$

1 — Déterminer $L_X(0)$.

2 — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $L_X(a)$ et $L_X(b)$ existent. Montrer que pour tout t compris entre a et b, $L_X(t)$ existe. Que peut-on en déduire sur le domaine de définition de L_X ?

3 — On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes . Montrer que si t appartient à l'intersection des domaines de définition de L_X et L_Y, alors $L_{X+Y}(t)$ existe et satisfait : $L_{X+Y}(t) = L_X(t)L_Y(t)$.

4 — Montrer que si X suit une loi normale centrée réduite, alors : $\forall t \in \mathbf{R}, \quad L_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

2.4 Solutions

3 Banque G2E — Informatique

[Solution 39] **Exercice 39** Nous nous intéressons à une gamme de DVD. Pour les reconnaître, ils possèdent tous un code composé des trois éléments suivants :

❶ Un numéro compris entre 1 et 9999.

❷ Une chaîne de caractère constitué de trois lettres.

❸ Un numéro final : 1 si le dvd vient d'Amérique 2 s'il vient d'Europe ou d'Afrique et 3 pour l'Asie.

Par exemple, le premier DVD d'Amérique sera : `1 AAA 1`. Le second sera `2 AAA 1` jusqu'à `9999 AAA 1`. Le suivant sera `1 AAB 1` puis `2 AAB 1` jusqu'à `9999 AAZ 1` Puis ensuite 1 ABA 1 et ainsi de suite. Les lettres sont augmentées lorsque l'on atteint 9999.

1 — Par quel objet Python proposez-vous de représenter le code d'un DVD ?
On suppose dans la suite que l'ensemble des DVD d'une vidéothèque est représenté par une liste `listeDVD` contenant tous les codes des DVD de la vidéothèque.
Dans une chaîne de caractère, la fonction `ord(lettre)` permet de transformer une chaîne de caractère formée d'une seule lettre en un entier : `ord('A')` renvoie `65`, `ord('B')` `66` et ainsi de suite jusqu'à `ord('Z')` qui renvoie `90`.

2 — Écrire une fonction qui reçoit en argument le nom sous forme de chaîne de caractères de la région et qui renvoie le code du premier DVD de la région (les noms étant `amerique`, `europe_afrique`, `asie`).

3 — **3.1.** Écrire une fonction qui reçoit en argument la liste des codes de tous les DVD et le code d'une région et qui renvoie la liste des codes des DVD de cette région.
3.2. Écrire une fonction qui reçoit en argument deux chaînes de caractères de longueur trois formées avec les lettres de `A` à `Z` et qui renvoie `True` si la première chaîne est plus grande ou égale à la seconde, `False` sinon (plus grand signifiant au-deLà dans l'ordre alphabétique : par exemple la chaîne `ABA` est plus grande que la chaîne `AAB`).
3.3. Écrire une fonction qui reçoit en argument la liste des codes de tous les DVD et le code d'une région, et qui renvoie le code du DVD le plus ancien de cette région (plus ancien : celui de code le plus petit).

[Solution 40] **Exercice 40** Nous utilisons le système décimal (base 10) dans nos activités quotidiennes. Ce système est basé sur une logique à dix symboles, de 0 à 9, avec une unité supérieure (dizaine, centaine, etc.) à chaque fois que dix unités sont comptabilisées. C'est un système positionnel, c'est-à-dire que l'endroit où se trouve le symbole définit sa valeur. Ainsi, le 2 de 523 n'a pas la même valeur que le 2 de 132. En fait 523 est l'abréviation de $5 \times 100 + 2 \times 10 + 3$. On peut selon ce principe imaginer une infinité de systèmes numériques fondés sur des bases différentes. En informatique, outre la base 10, on utilise très fréquemment le système binaire (base 2) puisque la logique booléenne est à la base de l'électronique numérique. Deux symboles suffisent : 0 et 1. Cette unité élémentaire ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1 s'appelle un bit (de l'anglais binary digit). Une suite de huit bits s'appelle un octet. On utilise aussi très souvent le système hexadécimal (base 16) du fait de sa simplicité d'utilisation et de représentation pour les mots machines (il est bien plus simple d'utilisation que le binaire). Il faut alors six symboles supplémentaires : A, B, C, D, E et F. Le tableau ci-dessous montre la représentation des nombres de 0 à 15 dans les bases 10, 2 et 16 :

Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Hexadécimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

1 — Écrire une fonction `Exa` convertissant une base décimale en base hexadécimale. Par exemple, la fonction renverra `B` si on execute `hexa(11)`.

2 — Écrire une fonction convertissant une base binaire en base décimale du type 0111 rend 7.

3 — À partir d'une liste de bases binaires, donner une fonction qui la convertit en bases hexadécimales par exemple 1100001001011000 donne `C258`.

4 — ***(Compression)*** Donner une fonction qui compresse une liste de 1 et de 0 comme ceci 11101100 donne (3,1),(1,0),(2,1),(2,0).

3.1 Solutions