D.M. de Mathématiques # 8
à rendre le Mardi 12 Mars 2019

Lycée Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

Un devoir par personne.

Problème 1 **Étude de la loi Gamma** Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul et a, λ et λ' sont des réels strictement positifs.
Dans la partie A, on détermine l'ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale. Dans la partie B, on établit quelques propriétés remarquables de cette fonction et on en calcule des valeurs. Cette fonction est utilisée dans la partie C pour construire une densité de probabilité dont on constate qu'elle est en lien avec les lois de Poisson.

Partie A : Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale

Soit Γ la fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}$ par : $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$. Soit x un réel.

- **1—**
  - **1.1.** Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^{x+1}$ et en déduire qu'il existe $\mathrm{T} \in [1, +\infty[$ tel que :
$$\forall t \in [1,+\infty[, \quad t \geq \mathrm{T} \quad \Longrightarrow \quad e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}.$$
  - **1.2.** Pour quelles valeurs de x, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
- **2—**
  - **2.1.** Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$ et donner dans ce cas la valeur de cette intégrale.
  - **2.2.** En déduire que $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.
- **3—** Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition de Γ.

Partie B : Quelques propriétés de cette fonction

- **4—**
  - **4.1.** Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad \Gamma(x) > 0$.
  - **4.2.** Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
  - **4.3.** Calculer $\Gamma(1)$ puis démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$.
- **5—** On admet que Γ a une limite en 1, en 0^+ et en $+\infty$.
  - **5.1.** Déterminer ces trois limites.
  - **5.2.** Déterminer également $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x}$.
- **6—**
  - **6.1.** Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.
  - **6.2.** A l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera avec soin, démontrer que : $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
  - **6.3.** En déduire enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression de $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ à l'aide de factorielles.

Partie C : Une densité de probabilité

On rappelle que a, λ et λ' sont des réels strictement positifs et on considère la fonction $f_{a,\lambda}$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_{a,\lambda} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

□ **7—**
- **7.1.** Étudier la continuité de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbf{R}^\star$ et déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante, $f_{a,\lambda}$ est continue sur $\mathbf{R}$.
- **7.2.** Étudier les variations de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.

□ **8—**
- **8.1.** Justifier que $f_{1,\lambda}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi que l'on précisera.
- **8.2.** Plus généralement, montrer que $f_{a,\lambda}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
- **8.3.** Quelle est alors une densité de la variable aléatoire $\dfrac{\lambda}{\lambda'}\mathrm{X}$?

□ **9—** Démontrer que : $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{a}{\lambda}$.

□ **10—** On suppose dans cette dernière question que a est un entier naturel non nul et on note t un réel strictement positif, et Z désigne une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
- **10.1.** Démontrer que la fonction ci-dessous est une primitive de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbf{R}^\star$:

$$\forall x \in \mathbf{R}^\star, \quad f_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- **10.2.** En déduire $\mathbf{P}(\mathrm{X} > t)$.
- **10.3.** En déduire enfin que $\mathbf{P}(\mathrm{X} > t) = \mathbf{P}(\mathrm{Z} < a)$ en précisant le paramètre de la variable aléatoire Z.

Problème 2 Trois réels a, b, c étant fixés, on définit $\mathrm{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

□ **1—** Déterminer trois matrices I, J, K indépendantes de a, b, c telles que $\mathrm{M}(a,b,c) = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}$. Calculer $\mathrm{J}^2, \mathrm{K}^2, \mathrm{K}^3$. Déterminer une relation entre I, J et K^2 ainsi qu'un polynôme annulateur de K. Quelles sont les valeurs propres possibles pour K ?

□ **2—** Justifier qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ orthogonale telle que $\mathrm{D} = {}^{\mathsf{T}}\mathrm{PKP}$ soit une matrice diagonale. Déterminer D et P vérifiant les conditions précédentes. On prendra pour D : $d_{1,1} < d_{2,2} < d_{3,3}$ où $d_{i,i}$ désigne le coefficient (i,i) de d pour $i \in [\![1 ; 3]\!]$.

□ **3—** En écrivant $\mathrm{M}(a,b,c)$ en fonction de I, K, K^2, déterminer la matrice ${}^{\mathsf{T}}\mathrm{PMP}$. En déduire les valeurs propres de M.

□ **4—** Discuter suivant les valeurs de a, b, c le nombre de valeurs propres distinctes de M et préciser dans chaque cas les sous-espaces propres associés.

□ **5—** On suppose dans cette question $a = 4, b = 2, c = \sqrt{2}$ et on note $\mathrm{M} = \mathrm{M}(4, 2, \sqrt{2})$.
- **5.1.** On définit la fonction f sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par :

$$f(x,y,z) = \frac{{}^t\mathrm{XMX}}{\|\mathrm{X}\|^2} \quad \text{où } \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathrm{X}' = {}^{\mathsf{T}}\mathrm{PX} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Montrer que $\|\mathrm{X}'\| = \|\mathrm{X}\|$ puis que pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$: $f(x,y,z) = \dfrac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.

Montrer que 2 et 8 sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et déterminer en quels points ils sont atteints.

- **5.2.** On cherche désormais à résoudre $\mathrm{B}^2 = \mathrm{M}$ d'inconnue $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Soit B une solution (s'il en existe). Montrer que B et M commutent. En déduire que si $\mathrm{X} \in \mathrm{E}_\lambda$ (le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ), alors $\mathrm{BX} \in \mathrm{E}_\lambda$.
- **5.3.** Montrer que les vecteurs propres de M sont également vecteurs propres de B. Justifier alors que $\Delta = {}^{\mathsf{T}}\mathrm{PBP}$ est une matrice diagonale et achever la résolution de l'équation.