D.S. de Mathématiques # 4
Le Samedi 19/01/2019. Durée : 3 heures 30.

Lycée Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés *proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.*

Les variables doivent être quantifiées, et les raisonnements avec les symboles logiques $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$ limités. Des points seront retirés dans le cas contraire.

Exercice 1 On considère, sous réserve d'existence à justifier, la fonction Γ définie par : $\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

□ **1—** Montrer que Γ est bien définie.

□ **2—**

■ **2.1.** Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ et pourquoi cette intégrale converge.

■ **2.2.** Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$. *Indication : On pourra effectuer un ou des changements de variable, que l'on justifiera soigneusement.*

□ **3—** Montrer que pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Si $n \in \mathbf{N}$, que vaut $\Gamma(n+1)$?

□ **4—** En déduire la nature de la série $\left(\sum \dfrac{1}{\Gamma(n)}\right)_{n\geqslant 1}$. Calculer la somme le cas échéant.

. . . .

SOLUTION de l'Exercice 1.

□ **1—** Soit $x > 0$. Alors si $x - 1 \geqslant 0$ (*i.e.* $x \geqslant 1$), l'intégrale est généralisée uniquement en $+\infty$. Il suffit donc de montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. C'est le cas par croissances comparées : nous avons $t^2 t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc pour t assez grand, $t^{x-1}e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Or, pour tout $A > 2$, $\displaystyle\int_1^{A} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{A} \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 1$, donc par le théorème de comparaison des fonctions positives, on en déduit la convergence de Γ pour $x \geqslant 1$.
Maintenant supposons que $0 < x < 1$. Alors l'intégrale est cette fois-ci généralisée aussi en zéro, donc on étudie $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
La seconde converge pour les mêmes raisons que précédemment : $t^{2+1-x}t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $2+1-x > 1$. En zéro, puisque $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$, pour t assez proche de zéro : $t^{x-1}e^{-t} \leqslant \dfrac{3}{2t^{1-x}}$. Ce qui garantit la convergence de l'intégrale d'après le théorème de comparaison et le critère de Riemann (pour « $\alpha = 1 - x < 1$ », à redémontrer dans ce cas !). Bref, $\boxed{\Gamma \text{ est bien définie}}$ puisque pour $x > 0$, l'intégrale associée est convergente.

□ **2—**

■ **2.1.** D'après le cours, $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$.

■ **2.2.** On a $\Gamma(1/2) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-u^2}2\,\mathrm{d}u$ en faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, licite puisque la fonction $t \in [0,\infty[\longmapsto \sqrt{t} \in [0,\infty[$ est une fonction C^1 bijective. Il reste à constater que la fonction intégrée est paire, donc on obtient finalement à l'aide de la question précédente : $\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.}$

□ **3—** Soit $x > 0$. Faisons une intégration par parties, soit donc $A > 0$.

$$\int_0^{A} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{A} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t + \left[-e^{-t}t^x\right]_0^A \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} x\Gamma(x).$$

D'où la formule annoncée. On en déduit alors par une simple récurrence, que $\Gamma(n) = n!\Gamma(1)$ et $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} = 1$.

□ **4—** La série à étudier se résume donc simplement à une série exponentielle. Elle est convergente, et sa somme vaut e d'après le cours.

Problème 1 **Étudie d'un couple aléatoire discret — D'après concours G2E.** Soient p_1, p_2 et p_3 des réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère $\mathrm{D}_n = \left\{(i,j) \in \mathbf{N}^2 \ : \ i+j \leq n\right\}$ et la fonction de deux variable f définie sur D_n par

$$f(i,j) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}.$$

□ **1—** Montrer que, pour tout couple (i,j) de D_n, on a :

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} \quad \text{et} \quad \sum_{(i,j)\in \mathrm{D}_n} f(i,j) = (p_1+p_2+p_3)^n.$$

Nous supposerons dans la suite du problème que : $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est définie pour tout $(i,j) \in \mathrm{D}_n$ par :

$$\mathbf{P}(\mathrm{X} = i, \mathrm{Y} = j) = f(i,j).$$

□ **2—** Justifier l'existence de (X, Y).
□ **3—** Déterminer les lois marginales des variables aléatoires X et Y.
□ **4—** En déduire les espérances mathématiques $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbf{E}(\mathrm{Y})$, ainsi que les variances $\mathbf{V}(\mathrm{X})$ et $\mathbf{V}(\mathrm{Y})$, des variables aléatoires X et Y.
□ **5—** En déduire un programme Python permettant de simuler (X, Y). On donnera le résultat sous forme d'une liste.
□ **6—** Retrouver par simulation un vecteur approché de $(\mathbf{E}(\mathrm{X}), \mathbf{E}(\mathrm{Y}))$. On renverra là encore le résultat sous forme d'une liste.
□ **7—** Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez votre réponse.
□ **8—** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.
□ **9—** En déduire la covariance de X et Y, ainsi que leur coefficient de corrélation.
□ **10—** Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $j \in [\![1, n]\!]$. On définit la variable aléatoire X_j par :

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_j = i) = \mathbf{P}(\mathrm{X} = i | \mathrm{Y} = j).$$

Déterminer la loi de probabilité de Y_i. reconnaître cette loi et en donner les paramètres. Déterminer en fonction de n, j, p_1 et p_2, l'espérance $\mathbf{E}(\mathrm{X}_j)$ et la variance $\mathbf{V}(\mathrm{X}_j)$ de la variable aléatoire X_j.
□ **11—** Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$. On définit la variable aléatoire Y_i par :

$$\mathbf{P}(\mathrm{Y}_i = j) = \mathbf{P}(\mathrm{Y} = j | \mathrm{X} = i).$$

Déterminer la loi de probabilité de Y_i. reconnaître cette loi et en donner les paramètres. Déterminer en fonction de n, i, p_1 et p_2, l'espérance $\mathbf{E}(\mathrm{Y}_i)$ et la variance $\mathbf{V}(\mathrm{Y}_i)$ de la variable aléatoire Y_i.

SOLUTION

□ **1—** Soit $(i,j) \in \mathrm{D}_n$. On calcule

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \times \frac{(n-i)!}{(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\,\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in \mathrm{D}_n,\ \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}.}$$

On calcule ensuite, en utilisant cette nouvelle écriture :

$$\sum_{(i,j)\in \mathrm{D}_n} f(i,j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} p_1^i\, p_2^j\, p_3^{n-i-j} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_1^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} p_2^j\, p_3^{(n-i)-j}$$

En appliquant alors deux fois la formule du binôme de Newton, on trouve que

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in \mathrm{D}_n} f(i,j) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_1^i (p_2+p_3)^{n-i} = (p_1+p_2+p_3)^n.}$$

□ **2—** On remarque que, comme $(\mathrm{X}, \mathrm{Y})(\Omega) = \mathrm{D}_n$, on a $\mathrm{X}(\Omega) = \mathrm{Y}(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
Soit alors $i \in [\![0; n]\!]$. On calcule, à l'aide du système complet associé à Y et de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathrm{X} = i) &= \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\mathbf{P}(\mathrm{X} = i, \mathrm{Y} = j)}_{=0 \text{ si } j > n-i} = \sum_{j=0}^{n-i} f(i,j) = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} p_1^i\, p_2^j\, p_3^{n-i-j} \\
&= \binom{n}{i} p_1^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} p_2^j\, p_3^{(n-i)-j} \\
&= \binom{n}{i} p_1^i (p_2+p_3)^{n-i} \quad \text{en appliquant la formule du binôme}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On reconnaît que X suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p_1.}$

En remarquant la symétrie entre i et j dans la question 1., on a aussi, pour $0 \leq i+j \leq n$,

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}.$$

Soit alors $j \in [\![0; n]\!]$. On calcule comme précédemment,

$$\mathbf{P}(Y=j) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\mathbf{P}(X=i, Y=j)}_{=0 \text{ si } i>n-j} = \sum_{i=0}^{n-j} f(i,j) = \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i} p_1^i\, p_2^j\, p_3^{n-i-j}$$

$$= \binom{n}{j} p_2^j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} p_1^i\, p_3^{(n-j)-i} = \binom{n}{j} p_2^j (p_1+p_3)^{n-j} \text{ en appliquant la formule du binôme}$$

$\boxed{\text{On reconnaît que X suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p_2.}$

□ **3—** De la question précédente, on a immédiatement $\boxed{\mathbf{E}(X) = np_1,\ \mathbf{E}(Y) = np_2,\ \mathbf{V}(X) = np_1(1-p_1) \text{ et } \mathbf{V}(Y) = np_2(1-p_2).}$

□ **4—**

Code | *Simulation de la loi de Bernoulli et de la binomiale*

```python
import random as rd
def Bernoulli(p):
    if rd.random() < p:
        return 1
    else:
        return 0

def binomiale(n,p):
    S = 0
    for i in range(n):
        S = S + Bernoulli(p)
    return S
```

```python
def coupleXY(n,p_1,p_2):
    return [binomiale(n,p1),binomiale(n,p2)]
```

□ **5—**

```python
def simuespXY(N,n,p1,p2):
    x=0
    y=0
    for i in range(N):
        x=x+coupleXY(n,p1,p2)[0]
        y=y+coupleXY(n,p1,p2)[1]
    return [x/N,y/N]
```

par exemple `simuespXY(100,10,0.5,0.5)` renvoie `[5.04, 4.89]`.

□ **6—** Comme $n \in \mathbf{N}^*$, $n+n > n$. On a donc $\mathbf{P}(X=n, Y=n) = 0$.
Or, d'après 2., $\mathbf{P}(X=n) \neq 0$ et $\mathbf{P}(Y=n) \neq 0$.

On a donc $\mathbf{P}(X=n, Y=n) \neq \mathbf{P}(X=n)\mathbf{P}(Y=n)$ et $\boxed{\text{X et Y ne sont pas indépendantes.}}$

□ **7—** Comme $(X,Y)(\Omega) = D_n$, i.e. $0 \leq X+Y \leq n$, on a nécessairement $S(\Omega) \subset [\![0; n]\!]$.
Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On décompose l'événement $S = k$ dans le système complet associé à X :

$$\mathbf{P}(S=k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(S=k, X=i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X+Y=k, X=i) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\mathbf{P}(X=i, Y=k-i)}_{=0 \text{ si } k-i<0}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!} p_1^i\, p_2^{k-i}\, p_3^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_3^{n-k} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} p_1^i p_2^{k-i}$$

$$= \binom{n}{k} p_3^{n-k} (p_1+p_2)^k \text{ en appliquant la formule du binôme.}$$

$\boxed{\text{On reconnaît que S suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p_1+p_2.}$

□ **8—** On a donc $\mathbf{V}(S) = n(p_1+p_2)(1-p_1-p_2) = n(p_1+p_2)p_3$.
Mais on sait que $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + 2\mathbf{cov}(X,Y) + \mathbf{V}(Y)$.

On en déduit que $\mathbf{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left(n(p_1+p_2)p_3 - np_1(1-p_1) - np_2(1-p_2)\right)$.

On a donc $\boxed{\mathbf{cov}(X,Y) = -n\,p_1\,p_2 \text{ et donc } \rho(X,Y) = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}.}$

□ **9—** On vient de constater que $\displaystyle\sum_{(i,j)\in D_n} f(i,j) = 1^n = 1$, donc l'existence de (X, Y) est assurée.

□ **10—** Soit $i \in [\![0; n]\!]$. On calcule

$$\mathbf{P}(X_j = i) = \frac{\mathbf{P}(X = i, Y = j)}{\mathbf{P}(Y = j)}$$

Si $i > n - j$, on a $i + j > n$ et donc $\mathbf{P}(X_j = i) = 0$.
Si $i \leq n - j$, on a

$$\mathbf{P}(X_j = i) = \frac{\binom{n}{j}\binom{n-j}{i} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}}{\binom{n}{j} p_2^j (1-p_2)^{n-j}} = \binom{n-j}{i} \frac{p_1^i p_3^{n-i-j}}{(1-p_2)^{n-j}} = \binom{n-j}{i} \left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^i \left(\frac{p_3}{1-p_2}\right)^{(n-j)-i}$$

Remarquons enfin que $\dfrac{p_1}{1-p_2} + \dfrac{p_3}{1-p_2} = \dfrac{p_1+p_3}{1-p_2} = \dfrac{1-p_2}{1-p_2} = 1$.

$\boxed{\text{On reconnaît que } X_j \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n-j \text{ et } \dfrac{p_1}{1-p_2}.}$

On sait alors que $\boxed{\mathbf{E}(X_j) = \dfrac{(n-j)p_1}{1-p_2} \text{ et } \mathbf{V}(X_j) = \dfrac{(n-j)p_1(1-p_1-p_2)}{(1-p_2)^2}.}$

□ **11—** Soit $j \in [\![0; n]\!]$. On calcule

$$\mathbf{P}(Y_i = j) = \frac{\mathbf{P}(Y = j, X = i)}{\mathbf{P}(X = i)}$$

Si $j > n - i$, on a $i + j > n$ et donc $\mathbf{P}(Y_i = j) = 0$.
Si $j \leq n - i$, on a

$$\mathbf{P}(Y_i = j) = \frac{\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}}{\binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i}} = \binom{n-i}{j} \frac{p_2^j p_3^{n-i-j}}{(1-p_1)^{n-i}} = \binom{n-i}{j} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^j \left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{(n-i)-j}$$

Remarquons enfin que $\dfrac{p_2}{1-p_1} + \dfrac{p_3}{1-p_1} = \dfrac{p_2+p_3}{1-p_1} = \dfrac{1-p_1}{1-p_1} = 1$.

$\boxed{\text{On reconnaît que } Y_i \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n-i \text{ et } \dfrac{p_2}{1-p_1}.}$ On sait alors que $\boxed{\mathbf{E}(Y_i) = \dfrac{(n-i)p_2}{1-p_1} \text{ et } \mathbf{V}(Y_i) = \dfrac{(n-i)p_2(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)^2}.}$

. . . .

Problème 2 **Fonctions génératrices et application au processus de Galton-Watson — D'après concours Agro/Veto.** Pour tout entier naturel n, I_n désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et $I_n^\star$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Pour une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbf{N}$, on pose, pour tout réel t pour lequel cela a un sens,

$$g_X(t) = \mathbf{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k.$$

La fonction g_X est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X. Dans tout ce problème, on considèrera que, $0^0 = 1$, ce qui permet par exemple d'affirmer ici que

$$g_X(0) = \mathbf{P}(X = 0).$$

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions génératrices, ainsi que des exemples d'applications. Tous les objets aléatoires seront supposés définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ fixé que nous n'expliciterons pas.

Partie 1. Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans I_n.

Soient n un entier naturel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans I_n. Pour $k \in I_n$, on note $a_k = \mathbf{P}(X = k)$.

□ **1—** *(La connaissance de g_X est équivalente à la connaissance de la loi—)*

■ **1.1.** Montrer que g_X est une fonction polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré maximal. Quelle est la valeur de $g_X(1)$?

■ **1.2.** Montrer que si g_X est donnée, alors la loi de X est entièrement connue.

□ **2—** Soient (m_1, m_2) deux entiers naturels et Z_1, Z_2 deux variables aléatoires réelles à valeurs dans respectivement I_{m_1} et I_{m_2}. On suppose que Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

■ **2.1.** Montrer que $g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t) g_{Z_1}(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

■ **2.2.** Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $p > 0$.

■ **2.3.** Soit Y une autre variable aléatoire réelle, de loi binomiale de paramètres n' et p avec n' un entier naturel. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que X + Y suit la loi binomiale de paramètres $n + n'$ et p.

Partie 2. Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans N.

Soit maintenant X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbf{N}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \mathbf{P}(X = n)$.

□ **3—** Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, la série $\left(\sum a_n t^n\right)_{n \geqslant 0}$ est absolument convergente. En déduire que g_X est définie sur $[-1, 1]$ et donner la valeur de $g_X(1)$.

□ **4—** Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1, 1]$, $g_{X+Y}(t) = g_X(t) g_Y(t)$.

□ **5—**

- **5.1.** On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, on note $q = 1 - p$. Calculer $g_X(t)$ pour $t \in [-1, 1]$.
- **5.2.** Même question pour X de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Dans la suite du problème, nous admettrons la propriété suivante : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, alors la connaissance de $g_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$ entraîne la connaissance de la loi de X. Ceci permet donc de reconnaître la loi d'une variable aléatoire dont on connaît la fonction génératrice.

Partie 3. Fonction génératrice de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.

Dans cette partie :

1. $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendantes et de même loi,
2. N est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendante des variables $(X_n)_{n \geqslant 1}$.

On pose $S_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On définit alors $Y = S_N$, c'est l'application définie par :

$$Y : \omega \in \Omega \longmapsto S_{N(\omega)}(\omega).$$

On admettra que Y est bien une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbf{N}$.
On notera f la fonction génératrice commune à toutes les variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$, h la fonction génératrice de N et g la fonction génératrice de Y, et enfin Ψ_n la fonction génératrice de S_n pour tout $n \geqslant 0$. On cherche donc à déterminer g en fonction de f et h.
On se limitera au cas où N prend ses valeurs dans I_s, où s est un entier naturel supérieur à 1, fixé dans toute cette partie. Soit $t \in [-1, 1]$.

□ **6—** Montrer que pour tout $n \in I_s$, $\quad \Psi_n(t) = (f(t))^n$.

□ **7—** Montrer que : $\quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{s} \mathbf{P}((S_n = k) \cap (N = n))$.

□ **8—** En déduire l'égalité $\quad g(t) = (h \circ f)(t) \quad$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

On admettra dans la suite du problème que le résultat obtenu dans la question précédente est encore valable dans le cas général, *i.e.*dans le cas où N est à valeurs dans N.

□ **9—** On suppose ici que les $(X_n)_{n \geqslant 1}$ suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ à valeurs dans $\mathbf{N}^\star$ et N la loi géométrique de paramètre $p' \in]0, 1[$. Montrer que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Partie 4. Multiplication d'une bactérie.

Une bactérie B est présente dans un milieu M plus ou moins propice à sa reproduction. Elle se reproduit de la façon suivante : chaque individu donne naissance à X nouvelles bactéries B (appelées dans la nature « fils ») puis meurt. On peut donc classer les bactéries par génération : les bactéries d'une génération vont chacune donner naissance à un nombre de fils puis disparaître. Les fils de toutes les bactéries de la génération n formeront ainsi la génération $n + 1$.
Le but est de déterminer la probabilité que toutes les bactéries B disparaissent du milieu M au bout d'un certain nombre de générations.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on notera dans la suite Y_n le nombre d'individus formant la génération n de bactéries B présentes dans M (on a donc d'après les hypothèses $Y_0 = 1$). On notera de plus $x_n = \mathbf{P}(Y_n = 0)$ (on a donc $x_0 = 0$).On admet que :

1. les variables aléatoires comptant le nombre de « fils » de toutes les bactéries B présentes à une génération n donnée sont des variables aléatoires indépendantes de même loi. Ces variables sont aussi indépendantes de Y.
2. X (nombre de « fils » d'une bactérie B fixée, quelle que soit sa génération) suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on notera f la fonction génératrice de X (on admet, si cela n'a pas été établi, que pour tout $t \in [-1, 1]$, $\quad f(t) = e^{\lambda(t-1)}$),
3. la génération $n = 0$ ne compte qu'une seule bactérie B.

□ **10—** Étudier les variations de la suite (x_n) et en déduire la convergence. On admettra dans la suite que la probabilité p que la bactérie B disparaisse du milieu M est $p = \lim_{n\to\infty} x_n$.

□ **11—** Donner la loi de Y_1 et en déduire que $x_1 = f(x_0)$.

□ **12—** Montrer que $Y_2 = \sum_{k=1}^{Y_1} X_k$ où les variables aléatoires $(X_k)_{k\geqslant 0}$ sont indépendantes et de même loi que X. Déduire du résultat de la partie 3 la fonction génératrice de Y_2 que l'on exprimera en fonction de f.

□ **13—**

- **13.1.** Pour $n \geqslant 1$, donner la fonction génératrice de Y_n et en déduire que $x_n = f(x_{n-1})$.
- **13.2.** En déduire que $p = f(p)$.

On note φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = f(t) - t$.

□ **14—** On suppose que $\lambda \leqslant 1$. Étudier les variations de φ sur $[0,1]$ et en déduire que la bactérie B disparaît du milieu M de façon presque-sûre.

□ **15—** On suppose maintenant que $\lambda > 1$.

- **15.1.** Étudier les variations de la fonction $\theta : u \longmapsto 1 - \dfrac{\ln u}{u}$ sur $]1,\infty[$.
- **15.2.** En déduire qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $\varphi'(\beta) = 0$. Déterminer les variations de φ sur $[0,1]$.
- **15.3.** Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
- **15.4.** python Rappeler un algorithme permettant de trouver une valeur approchée à `eps` près de α.
- **15.5.** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \leqslant \alpha$ et conclure quant à la probabilité de disparition de la bactérie B du milieu M.

SOLUTION

□ **1—**

- **1.1.** Si X est à valeurs dans I_n, alors $\forall t \in \mathbf{R}$, $g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, g_X est un polynôme de degré n.

$g_X(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k = 1$ par définition d'une variable aléatoire à valeurs dans I_n.

$$\boxed{g_X(1) = 1}$$

- **1.2.** La fonction g_X est un polynôme à coefficients réels. Si g_X est donnée, par unicité des coefficients d'un polynôme, les coefficients a_k sont déterminés de façon unique. Donc la loi de X est connue.

□ **2—**

- **2.1.** Pour tout réel t, $E(t^{Z_1+Z_2}) = E(t^{Z_1}t^{Z_2}) = E(t^{Z_1})E(t^{Z_2})$ car les variables aléatoires Z_1 et Z_2 étant indépendantes, t^{Z_1} et t^{Z_2} sont indépendantes. On a bien :

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t)g_{Z_2}(t)}$$

- **2.2.** Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors : $\forall t \in \mathbf{R},\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt+q)^n$. (On a posé $q = 1-p$)
- **2.3.** Si Y suit aussi une loi binomiale de paramètres n' et p, et si X et Y sont indépendantes, alors $\forall t \in \mathbf{R}$, $g_{X+Y}(t) = (pt+q)^n(pt+q)^{n'} = (pt+q)^{n+n'}$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n+n'$ et p. La fonction génératrice caractérise une loi, donc X + Y suit une loi binomiale de paramètres $n+n'$ et p.

Partie 2. Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbf{N}$*.*

□ **3—** $\forall t \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $|a_n t^n| \leqslant a_n$. La série de terme général a_n converge, et sa somme vaut 1. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série $\sum a_n t^n$ converge absolument. Or la convergence absolue entraîne la convergence. Donc $\boxed{g_X \text{ est défini sur } [-1,1].}$ $g_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$, par définition d'une loi de variable aléatoire (ou de l'axiome d'additivité dénombrable d'une probabilité).

□ **4—** Si X et Y sont indépendants, alors $\forall t \in [-1,1]$, les variables aléatoires t^X et t^Y sont indépendantes et admettent des espérances d'après la question précédente. Donc $g_{X_1+X_2}(t) = \mathbf{E}(t^{X_1+X_2}) = \mathbf{E}(t^{X_1}t^{X_2}) = \mathbf{E}(t^{X_1})\mathbf{E}(t^{X_2}) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$.

$$\boxed{g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t).}$$

□ **5—**

- **5.1.** Si X suit une loi géométrique de paramètre p à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, alors

$\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pt^k = pt\sum_{k=0}^{+\infty}(qt)^k = \boxed{\dfrac{pt}{1-qt}}$, car $|qt| < 1$

- **5.2.** Si X suit une loi Poisson de paramètre λ, alors $\forall t \in [-1,1]$, $g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}t^k = \boxed{e^{-\lambda}e^{\lambda t}}$.

Partie 3. Fonction génératrice de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.

□ **6**— Soit $t \in [-1,1]$, alors $\Psi_n(t) = \mathbf{E}\left(t^{\sum_{k=1}^n X_k}\right) = f(t)^n$ où la dernière étape provient de l'indépendance des X_i.

□ **7**— La variable aléatoire N étant à valeurs dans I_s, la famille $(N=n)_{n\in I_s}$ est un système complet d'événements. Utilisons la formule des probabilités totales : $\forall k \in \mathbf{N}$, $P(Y=k) = \sum_{n=0}^{s} P((S_n=k)\bigcap(N=n))$.

Or si $N=n$, alors $Y=S_n$. Donc $\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{s} \mathbf{P}((S_n=k)\bigcap(N=n))$.

□ **8**— $\forall t \in [-1,1]$, $g(t) = g_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s} \mathbf{P}((S_n=k)\bigcap(N=n))\right)t^k$, et finalement $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s} P(S_n=k)P(N=n)\right)t^k$ car N est indépendante des variables X_n, donc de S_n.

Soit $t \in [-1,1]$. Pour tout $n \in I_s$ la série de terme général $P(S_n=k)t^k$ est absolument convergente. Donc la combinaison linéaire $\sum_{n=0}^{s} P(N=n)\left(\sum P(S_n=k)t^k\right)$ est absolument convergente (comme somme finie de termes généraux de séries absolument convergentes) et $\sum_{n=0}^{s} P(N=n)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n=k)t^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s} P(N=n)P(S_n=k)t^k\right) = g(t)$

Donc : $g(t) = \sum_{n=0}^{s} P(N=n)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n=k)t^k\right) = \sum_{n=0}^{s} P(N=n)\Psi_n(t)$, $g(t) = \sum_{n=0}^{s} \mathbf{P}(N=n)(f(t))^n = h(f(t))$. Ce qui montre que :

$$\boxed{\forall \in [-1,1],\ g(t) = (h\circ f)(t).}$$

□ **9**— On a déjà vu que (calcul d'une fonction génératrice de loi géométrique) : $\forall t \in [-1,1]$, $f(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$ et $h(t) = \dfrac{p't}{1-q't}$.

Donc $g(t) = h(f(t)) = \dfrac{p'f(t)}{1-q'f(t)} = \dfrac{p'\dfrac{pt}{1-qt}}{1-q'\dfrac{pt}{1-qt}} = \dfrac{pp't}{1-(q+q'p)t}$.

$$\boxed{g(t) = \frac{pp't}{1-(q+q'p)t}.}$$

Or $q+q'p = 1-p+(1-p')p = 1-pp'$, donc $g(t) = \dfrac{pp't}{1-(1-pp')t}$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre pp'.

$$\boxed{\text{Y suit la loi géométrique de paramètre } pp'}$$

Partie 4. Multiplication d'une bactérie.

□ **10**— Si à la génération n il n'y a plus de bactéries, alors à génération $n+1$ il n'y a pas non plus de bactérie. Autrement dit, nous avons l'inclusion suivante entre évènements : $\{Y_n=0\} \subset \{Y_{n+1}=0\}$, donc en passant aux probabilités : $\boxed{x_n \leqslant x_{n+1}.}$ La suite (x_n) est croissante, majorée par 1 (ce sont des probabilités), donc elle converge vers une limite finie dans $[0,1]$.

□ **11**— Y_1 est le nombre de fils de la bactérie de départ. Donc Y_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ.
$f(0) = g_{Y_1}(0) = P(Y_1=0) = x_1$

$$\boxed{x_1 = f(x_0)}$$

□ **12**— Si $Y_1=0$, alors $Y_2=0$. Sinon : la bactérie de départ a Y_1 fils qu'on peut numéroter de 1 à Y_1.

Appelons X_k le nombre de fils du fils numéro k. Notons, comme dans la partie précédente, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Le nombre de fils de la seconde génération est $Y_2 = S_{Y_1}$. Par hypothèse les variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et suivent la même loi que X.

Nous avons montré précédemment que : $\boxed{g_{Y_2} = g_{Y_1}\circ f = f\circ f.}$

□ **13**—

■ **13.1.** Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $g_{Y_n} = f^n$ » (composée n-ème de f). Établissons-là par récurrence.

■ ***Initialisation.*** $\mathcal{P}_1$ est vraie.

■ ***Hérédité.*** Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Si $Y_n=0$, alors $Y_{n+1}=0$. Sinon : à la génération n il y a Y_n bactéries qu'on peut numéroter de 1 à Y_n.

Appelons X_k le nombre de fils du fils numéro k.

Notons, comme précédemment $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Le nombre de fils de la $(n+1)$-ème génération est $Y_{n+1} = S_{Y_n}$
Par hypothèse les variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et suivent la même loi que X.
Nous avons montré à la question C.4 que alors $g_{Y_{n+1}} = g_{Y_n}\circ f$
En utilisant l'hypothèse de récurrence, $g_{Y_{n+1}} = f^n\circ f = f^{n+1}$.

Par récurrence, $g_{Y_{n+1}} = f^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Donc $x_n = g_{Y_n}(0) = f^n(0) = f(f^{n-1}(0)) = f(x_{n-1})$.

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad x_n = f(x_{n-1})}$$

■ **13.2.** Lorsque n tend vers $+\infty$, (x_n) tend vers p. La suite (x_{n-1}) converge aussi vers p. La fonction f étant continue en p, $(f(x_{n-1}))$ tend vers $f(p)$. Or $x_n = f(x_{n-1})$, donc par unicité de la limite $p = f(p)$.

$$\boxed{p = f(p).}$$

□ **14—** Soit maintenant $\lambda \leqslant 1$.
$\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = f(t) - t = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - t$, $\varphi'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - 1$.
$\forall t \in [0,1[$, $t - 1 < 0$ donc $\mathrm{e}^{\lambda(t-1)} < 1$, donc $\lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} < 1$ et $\varphi' < 0$ sur $[0,1]$.

t	0		1
φ	$\frac{1}{e^\lambda}$	$\searrow$	0

φ est strictement décroissante de $[0,1]$ sur $[0, \mathrm{e}^{-\lambda}]$.
Le seul zéro de φ est 1. Or les zéros de φ sont les point fixes de f, donc nécessairement $p = 1$.

$$\boxed{\text{La probabilité que la bactérie disparaisse est 1}}$$

□ **15—** Soit maintenant $\lambda > 1$.

■ **15.1.** $\forall t \in]1, +\infty[$, $\theta'(t) = \dfrac{\ln u - 1}{u^2}$.

En traçant le tableau de variations, on constate : $\forall u > 1, \quad \theta(u) > 0$, donc $\dfrac{\ln u}{u} < 1$ et donc que $\ln u < u$.

$$\boxed{\forall u > 1,\ \ln u < u}$$

■ **15.2.** $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = f(t) - t = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - t$, $\varphi'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - 1$ et $\varphi''(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} > 0$. La fonction φ' est continue, strictement croissante sur $[0,1]$ dans $\mathrm{J} = [\lambda \mathrm{e}^{-\lambda} - 1, \lambda - 1]$ donc réalise une bijection entre ces deux intervalles.
On a montré à la question précédente que $\ln \lambda < \lambda$, donc $\lambda < \mathrm{e}^\lambda$ et $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda} - 1 < 0$. Comme $\lambda - 1 > 0$, 0 est élément de J.
$\boxed{\text{Il existe donc un unique } \beta \in]0,1[\text{ tel que } \varphi'(\beta) = 0.}$ La fonction φ' est négative sur $[0, \beta]$ et positive sur $[\beta, 1]$.
La fonction φ est strictement décroissante sur $[0, \beta]$ et strictement croissante sur $[\beta, 1]$.

■ **15.3.** $\varphi(1)$ étant égal à 0, nécessairement $\varphi(\beta) < 0$.
La restriction de φ à $[0, \beta]$ réalise une bijection entre $[0, \beta]$ et $[\varphi(\beta), \mathrm{e}^{-\lambda}]$. Il existe donc un réel unique $\alpha \in]0, \beta[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. Or $\varphi(\alpha) = 0$ équivaut à $f(\alpha) = \alpha$.
Donc $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in]0,1[\text{ tel que } f(\alpha) = \alpha.}$

■ **15.4.**

Code | *Recherche d'un zéro par dichotomie*

```python
def dicho(a,b,f,prec):
    while b-a>prec:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            b=c
        else:
            a=c
        return a,b

lamba=1
from math import exp
dicho(0,1,lambda x:exp(lamba*(x-1)),0.01)
```

■ **15.5.** La fonction f est continue strictement croissante de $[0, \alpha]$ dans $[\mathrm{e}^{-\lambda}, \alpha] \subset [0, \alpha]$. Le segment $[0, \alpha]$ est stable par f. Comme $x_0 = 0$, on montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ x_n \in [0, \alpha]$. La limite de (x_n) est donc élément de $[0, \alpha]$.
Or on a vu que la limite de (x_n) est un point fixe de f. Le seul point fixe de f dans ce segment est α, donc la suite (x_n) tend vers α.
$\boxed{\text{La probabilité de disparition de la bactérie est } \alpha \text{ qui est strictement inférieure à 1.}}$