D.M. de Mathématiques # 6
à rendre le Mardi 11 Décembre 2018

Lycée Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
Le devoir peut être fait à deux, les deux écritures doivent ***impérativement*** *apparaître sur la copie et en parts égales.*
On rappelle qu'il vaut mieux, à titre exceptionnel, ne pas rendre un devoir maison plutôt que de recopier une correction trouvée sur internet.

Exercice 1 **Étude de proportions d'apparitions de certains allèles** On s'intéresse à un gène à deux allèles, A et a, l'allèle a étant létal : les individus aa naissent malades et meurent très jeunes. On suppose ici que le génotype n'influe pas sur les idylles et que les génotypes Aa, aA sont les mêmes. Dans une population initiale d'adultes, la proportion d'individus Aa est notée p.

□ **1—** Quelle est la probabilité qu'un couple d'adultes de cette génération initiale soit potentiellement à risques ? (*i.e.*susceptible d'avoir des enfants malades).

□ **2—** Soit un tel couple, qui va bientôt avoir un enfant. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

□ **3—** Quelle est la probabilité qu'un enfant issu de cette génération initiale soit malade *i.e.*aa ?

□ **4—** Quelle est la probabilité qu'un enfant sain issu de cette génération initiale soit Aa ? AA ?

□ **5—** Soit p_n la probabilité qu'un adulte de la génération numéro n soit Aa.
Exprimer pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ le terme p_{n+1} en fonction de p_n.

□ **6—** python Conjecturer la nature de cette suite à l'aide de Python en traçant les premiers termes.

□ **7—** Démontrer les conjectures faites sur (p_n) et interpréter.

SOLUTION de l'Exercice 1.

□ **1—** Il s'agit ici de calculer la probabilité que chaque parent ait au moins une fois a présent dans leur génotype, *i.e.*que les deux adultes soient Aa. Notons A_i l'évènement « l'adulte i possède le génotype Aa ». Alors on calcule $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1) \cap \mathbf{P}(A_2) = \boxed{p^2}$ puisque l'on peut supposer que les génotypes des deux adultes sont indépendants (indépendance supposée dans la phrase « le génotype n'influe pas sur les idylles »).

□ **2—** On note M l'évènement « l'enfant né du couple est aa ». On calcule : $\mathbf{P}(M \mid A_1 \cap A_2) = \boxed{\frac{1}{4}}$ car chaque adulte transmet soit A soit a avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Donc nous n'avons qu'une seule possibilité sur quatre que l'enfant soit malade : les deux adultes transmettent a.

□ **3—** Il faut donc distinguer le cas où chaque membre du couple possède Aa des autres grâce à la formule des probabilités totales. Dans les autres cas (autres types de couples), la probabilité de donner naissance à un enfant malade est nulle (aucun adulte n'est aa, et si un des adultes est AA, il ne peut transmettre a...). D'après la formule des probabilités totales, la probabilité qu'un enfant de cette génération soit malade est $\frac{p^2}{4} + 0 \times (1-p^2) = \boxed{\frac{p^2}{4}}$.

□ **4—** On note E_{Aa} et E_{AA} les deux évènements donnés dans l'énoncé (notations évidentes) ainsi que E_M l'évènement « l'enfant est malade ». Nous avons montré précédemment que $\mathbf{P}(E_M) = \frac{p^2}{4}$. On a :

$$\mathbf{P}(E_{Aa}) = (1-p)^2 \times 0 + \frac{p^2}{2} + (1-p)p\frac{1}{2} + p(1-p)\frac{1}{2} = p - \frac{p^2}{2}.$$

On en déduit alors, puisque $E_{Aa} \subset {}^{\complement}E_M$: $\boxed{\mathbf{P}(E_{Aa} \mid {}^{\complement}E_M) = \frac{\mathbf{P}(E_{Aa} \cap {}^{\complement}E_M)}{\mathbf{P}({}^{\complement}E_M)} = \frac{\mathbf{P}(E_{Aa})}{\mathbf{P}({}^{\complement}E_M)} = \frac{p - \frac{p^2}{2}}{1 - \frac{p^2}{4}}}$.

Maintenant, puisque $\mathbf{P}(. \mid {}^{\complement}E_M)$ une probabilité et que $\mathbf{P}({}^{\complement}E_M \cap E_{aa}) = 0$, on déduit de la formule des probabilités totales que

$$\mathbf{P}(E_{AA} \mid {}^{\complement}E_M) = 1 - \mathbf{P}(E_{Aa} \mid {}^{\complement}E_M).$$

En conclusion : $\boxed{\mathbf{P}(E_{AA} \mid {}^{\complement}E_M) = 1 - \frac{p - \frac{p^2}{2}}{1 - \frac{p^2}{4}}}$.

□ **5—** D'après ce qui précède, $\mathbf{P}(E_{Aa}) = p - \frac{p^2}{2}$.

On généralise de manière évidente la question précédente, en remplaçant p par la vraie probabilité actuelle p_n : pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{p_{n+1} = p_n - \dfrac{p_n^2}{2}}$.

□ **6—** On trace les premiers termes de la suite.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
def p(n):
    p=0.5
    for k in range(n):
        p=p-p**2/2
    return p
plt.plot([p(k) for k in range(11)],'bo')
plt.title("Suite p")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("p")
```

Nous voyons que la suite semble converger vers zéro sauf pour $p = 0$ où la proportion reste nulle.

```python
plt.show()
```

□ **7—** Démontrons-le.

La suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est clairement décroissante, puisque pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, nous avons $p_{n+1} - p_n = -\dfrac{p_n^2}{2} \leqslant 0$. De plus elle est minorée par zéro, car $[0,1]$ est stable pour la fonction $f : x \longmapsto x - x^2/2$ qui est croissante sur $[0,1]$ et $f(0) = 0$, $f(1) = 1/2 \leqslant 1$.
La suite (p_n) est donc décroissante minorée par zéro, et converge vers l'unique solution dans $[0,1]$ de l'équation $x = x - x^2/2$ qui est zéro.

Problème 1 **Dénombrement des partitions ayant k points fixes** Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. On note I_n^k le nombre de permutations de l'ensemble $[\![1 \,;\, n]\!]$ ayant k points fixes (ce sont des points dont l'image est eux-même). On convient que $I_0^0 = 1$.

□ **1—** Calculer I_n^n, I_n^{n-1} et I_n^{n-2} pour $n \geqslant 2$.

□ **2—** Rappeler le nombre de permutations de $[\![1 \,;\, n]\!]$. Que vaut alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_n^k$? Justifiez proprement votre réponse.

□ **3—** Justifier, de façon combinatoire, que : $I_n^k = \dbinom{n}{k} I_{n-k}^0$.

□ **4—** Construire la table des I_n^k pour $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 3$ sous forme de tableau à double entrée.

□ **5—** Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_k^0 = n!$. *On pourra introduire le changement de variable $p = n - k$.*

□ **6—** En déduire que $I_{n+1}^0 = (n+1)! - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} I_k^0$.

□ **7—** En déduire par récurrence forte que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad I_n^0 = n I_{n-1}^0 + (-1)^n$.

□ **8—** python Créer une fonction Python `ConstrI(n)` qui étant donné un entier n renvoie la liste des I_k^0 pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

□ **9—** Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_n^0 = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n^0}{n!}$.

SOLUTION de l'Exercice 1.

□ **1—** Une permutation ayant n points fixes n'est autre que l'identité. Par ailleurs, si elle possède $n-1$, il n'y a qu'un seul point image à déterminer qui put donc être à $n-1$ endroits. Si elle possède $n-2$ points fixes, il reste $\dbinom{n}{2}$ choix pour les deux points non fixés. Ainsi :

$$\boxed{\# I_n^n = 1, \quad \# I_n^{n-1} = n, \quad \# I_n^{n-2} = \binom{n}{2}.}$$

□ **2—** D'après le cours nous avons $\boxed{n!}$ permutations dans $[\![1 \,;\, n]\!]$. Puisque l'ensemble de ces permutations s'écrit comme un réunion disjointe des permutations ayant k points fixes avec $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$, nous avons par passage au cardinal : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_n^k = n!.}$

□ **3—** Si une permutation a exactement k points fixes, alors les $n-k$ autres ne sont pas fixés, donc la restriction de la permutation de départ à cet ensemble de points non fixés est un élément de l'ensemble des permutations de $n-k$ éléments n'ayant aucun point fixe. Il y a de plus $\dbinom{n}{k}$ choix possibles pour ces points fixes. Donc au final : $\boxed{I_n^k = \dbinom{n}{k} I_{n-k}^0.}$

□ **4—**

□ **5—** Nous avons déjà vu que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_n^k = n!$. D'après la question précédente, on a : $I_n^k = \dbinom{n}{k} I_{n-k}^0$, donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_{n-k}^0 = n! = \sum_{p=n}^{0} \binom{n}{n-p} I_p^0 = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} I_p^0$ en utilisant la symétrie du coefficient binomiale.

En conclusions, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_k^0 = n!.}$

□ **6—** Faire la substitution $n \leftarrow n+1$ dans la question précédente et sortir le terme d'ordre $n+1$ de la somme.
□ **7—** ■ ***Initialisation.*** Pour $n=0$, nous avons bien $1 = 0+1$.

■ ***Hérédité.*** Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n, alors on calcule :

$$\begin{aligned}
I_{n+1}^0 &= (n+1)! - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} I_k^0 = (n+1)! - \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \left(kI_{k-1}^0 + (-1)^k\right) - 1 \\
&= (n+1)! - \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} I_{k-1}^0 - \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^k - 1 \\
&= (n+1)! - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{\ell!(n-\ell)!} I_\ell^0 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^k \\
&= (n+1)\left(n! - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} I_\ell^0\right) - (0 - (-1)^{n+1}) \\
&= (n+1) I_n^0 + (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence (forte).}}$

□ **8—**

```python
def ConstrI(n):
    L=[1]
    for k in range(1,n+1):
        L=L+[k*L[-1]+(-1)**k]
    return L
```

□ **9—** Le résultat se prouve par récurrence sur n.

Pour la deuxième partie, il suffit d'utiliser la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$. D'où : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n^0}{n!} = \frac{1}{e}}$.

....

Problème 2 **Stratégie de jeu, problème de ruine du joueur** Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répétée sur des paris à espérance favorable. On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.

On adopte ici le cadre simplifié suivant : on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.
Un joueur mise une partie M_n de son capital sur la réalisation de l'événement $(X_n = 1)$, pour chaque $n > 1$. La variable M_n est supposée indépendante des variables X_k, $k \in \mathbf{N}^*$
En cas de victoire, il double sa mise (son capital est donc augmenté de M_n), en cas de défaite il perd sa mise (son capital diminue de M_n).
Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du $n^{ième}$ pari.
On a ainsi l'encadrement : $0 \leq M_{n+1} \leq C_n$ pour tout entier n.
Le jeu est supposé favorable, on considérera dans tout le problème : $\dfrac{1}{2} < p < 1$.
Nous admettrons la propriété suivante dans tout le problème : si (A_n) est une suite d'évènements indépendants, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \mathbf{P}(A_n).$$

Quitte ou double

□ **1—** Déterminer deux réels a et b vérifiant : $\forall n \in \mathbf{N},\quad C_{n+1} = C_n + (aX_{n+1} + b)\,M_{n+1}$.

□ **2—** Établir : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad \mathbf{E}(C_n) = C_0 + (2p-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(M_k)$. En déduire que pour maximiser $\mathbf{E}(C_n)$ il faut miser tout son capital à chaque pari.

□ **3—** Montrer que cette stratégie, dite du "quitte ou double", conduit de façon quasi-certaine à la ruine du joueur, et déterminer le nombre moyen de parties conduisant à la ruine (on parle de ruine s'il existe un entier naturel n pour lequel $C_n = 0$).

Stratégie à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari une fraction du capital dont il dispose : on a ainsi $M_{n+1} = \alpha C_n$, avec $\alpha \in]0,1[$ indépendant de n.

□ **4**— Établir : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}} (1-\alpha)^{1-X_{n+1}} C_n$.

□ **5**— On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Déterminer la loi de S_n et son espérance.

□ **6**— Établir : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad C_n = (1+\alpha)^{S_n} (1-\alpha)^{n-S_n} C_0$.

□ **7**— Montrer que : $\mathbf{E}\left[\frac{1}{n} \ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right] = p \ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha)$.

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

Optimisation : le critère de Kelly

On pose, pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x)$

□ **8**— *(Étude de f —)*

- **8.1.** Étudier les variations de f sur $]0,1[$. Montrer que f admet un maximum sur $]0,1[$, atteint en un unique réel α_K que l'on exprimera en fonction de p.
- **8.2.** Déterminer la limite de f en 1 et interpréter le résultat.
- **8.3.** Montrer que f s'annule deux fois exactement sur $[0,1[$: en 0 et en un réel α_c vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.
- **8.4.** Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,1[$.

□ **9**— Conclusion : le choix $\alpha = \alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme. Que donnerait l'expression de α_K dans les cas limites $p = \frac{1}{2}$ et $p = 1$? Interpréter ces deux résultats.

Étude de la valeur critique α_c

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\frac{1}{2}$. On considèrera dans ce qui suit que α_c est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

□ **10**— On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

- **10.1.** Montrer que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$ On notera encore φ ce prolongement.
- **10.2.** Justifier que φ est dérivable sur $]0,1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme

$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)[\ln(1-x)]^2}.$$

- **10.3.** Déterminer les variations de h sur $]0,1[$.
- **10.4.** Montrer que φ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle à préciser.

□ **11**— Montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$.
On commencera par donner le développement limité en 1 à l'ordre 2 de la fonction ln.

□ **12**—

- **12.1.** Établir : $\forall p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.
- **12.2.** En déduire que α_c, est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\frac{1}{2}$ et que :

$$\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

- **12.3.** Établir : $\alpha_c(x) \underset{x \to \frac{1}{2}}{\sim} 2\alpha_K$.

Remarque : pour des valeurs de p proches de $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire des paris "légèrement" favorables, un cas très fréquent), il faut prendre $\alpha < 2\alpha_K$.
Par sécurité (p n'est en pratique connu qu'approximativement), les parieurs choisissent souvent $\alpha = \frac{\alpha_K}{2}$, la moitié de la valeur de Kelly.

SOLUTION de l'Exercice 1. Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répétée sur des paris à espérance favorable. On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.

Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du $n^{ième}$ pari.

Quitte ou double

□ **1—** On a deux conditions à vérifier : pour $X_{n+1} = 0$ on doit avoir $C_{n+1} = C_n - M_{n+1}$ et pour $X_{n+1} = 1$ on doit avoir $C_{n+1} = C_n + M_{n+1}$.
On résout ces conditions : $\left\{ \begin{array}{c} C_n + bM_{n+1} = C_n - M_{n+1} \\ C_n + (a+b)\, M_{n+1} = C_n + M_{n+1} \end{array} \right.$ si $\left\{ \begin{array}{c} b = -1 \\ a = 2 \end{array} \right.$

Conclusion : $\boxed{C_{n+1} = C_n + (2X_{n+1} - 1)\, M_{n+1}}$

□ **2—** On a besoin d'une relation de récurrence sur $\mathbf{E}(C_n)$. On a donc :
$\mathbf{E}(C_{n+1}) = \mathbf{E}(C_n) + (2\mathbf{E}(X_{n+1}) - 1)\, \mathbf{E}(M_{n+1})$ (car X_{n+1} et M_{n+1} indépendants) et
$\mathbf{E}(C_{n+1}) = \mathbf{E}(C_n) + (2p - 1)\, \mathbf{E}(M_{n+1})$ et on a alors par récurrence :

✓ Pour $n = 1$: $C_0 + (2p-1) \sum_{k=1}^{1} \mathbf{E}(M_k) = C_0 + (2p-1)\, \mathbf{E}(M_1) = \mathbf{E}(C_1)$.

✓ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $E(C_n) = C_0 + (2p-1) \sum_{k=1}^{n} E(M_k)$

alors

$$\begin{aligned} E(C_{n+1}) &= E(C_n) + (2p-1)\, E(M_{n+1}) \\ &= C_0 + (2p-1) \left(\sum_{k=1}^{n} E(M_k) + E(M_{n+1}) \right) \\ &= C_0 + (2p-1) \sum_{k=1}^{n+1} E(M_k) \end{aligned}$$

✓ *Conclusion :* $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathbf{E}(C_n) = C_0 + (2p-1) \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(M_k)}$

Comme $(2p-1) > 0$, plus $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(M_k)$ est grande plus $E(C_n)$ est grande. et comme $M_{k+1} \leq C_k$, on aura $E(C_n) \leq C_0 + (2p-1) \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(C_{k-1})$ cette somme étant atteinte pour $M_{k+1} = C_k$ pour tout k.

Conclusion : $\boxed{\text{pour maximiser } \mathbf{E}(C_n) \text{ il faut miser tout son capital à chaque pari.}}$

□ **3—** Si l'on mise la totalité de son capital, à chaque pari, on est ruiné si $X_n = 0$ pour un certain $n = 0$. Donc « être ruiné » est l'évènement

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X_n = 1),$$

le complémentaire $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (X_n = 1)$ est de probabilité $\lim_{N \to +\infty} p^N$ par indépendance des X_n et d'après la propriété admise du début de problème. On a donc
$\lim_{N \to +\infty} P\left(\cap_{n=1}^{N} (X_n = 1)\right) = 0$ et donc la probabilité de ne jamais êter ruiné est nulle.

Conclusion : $\boxed{\text{Si le joueur mise tout son capital, la ruine est quasi certaine.}}$

Stratégie à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari une fraction du capital dont il dispose : on a ainsi $M_{n+1} = \alpha C_n$, avec $\alpha \in]0, 1[$.

□ **4—** On a $C_{n+1} = C_n + (2X_{n+1} - 1)\, M_{n+1} = C_n + (2X_{n+1} - 1)\, \alpha C_n$ donc

✓ si $X_{n+1} = 1$ alors $(1+\alpha)^{X_{n+1}} (1-\alpha)^{1-X_{n+1}} C_n = (1+\alpha)\, C_n = C_{n+1}$

✓ si $X_{n+1} = 0$ alors $(1+\alpha)^{X_{n+1}} (1-\alpha)^{1-X_{n+1}} C_n = (1-\alpha)\, C_n = C_{n+1}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \qquad C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}} (1-\alpha)^{1-X_{n+1}} C_n.}$

□ **5—** On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
S_n représente le nombre de succès pendant les n premières épreuves.
Ces épreuves étant indépendantes et ayant la même probabilité p de succès,

Conclusion : $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } E(S_n) = np}$

□ **6—** On a par récurrence :

✓ pour $n = 1$: $(1+\alpha)^{S_1} (1-\alpha)^{1-S_1} C_0 = (1+\alpha)^{X_1} (1-\alpha)^{1-X_1} C_0. = C_1$

✓ Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $C_n = (1+\alpha)^{S_n} (1-\alpha)^{n-S_n} C_0$
alors

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (1+\alpha)^{X_{n+1}} (1-\alpha)^{1-X_{n+1}} C_n \\ &= (1+\alpha)^{S_n + X_{n+1}} (1-\alpha)^{n - S_n - X_{n+1}} C_0 \\ &= (1+\alpha)^{S_{n+1}} (1-\alpha)^{n - S_{n+1}} C_0 \end{aligned}$$

✓ *Conclusion :* $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^\star, \qquad C_n = (1+\alpha)^{S_n} (1-\alpha)^{n-S_n} C_0.}$

□ **7—** On a

$$\begin{aligned}
\frac{C_n}{C_0} &= (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} \text{ donc}\\
\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) &= S_n\ln(1+\alpha)+(n-S_n)\ln(1-\alpha) \text{ car } >0\\
\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) &= \frac{S_n}{n}\ln(1+\alpha)+\left(1-\frac{S_n}{n}\right)\ln(1-\alpha) \text{ et donc}\\
E\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right] &= E\left[\frac{S_n}{n}\right]\ln(1+\alpha)+\left(1-E\left[\frac{S_n}{n}\right]\right)\ln(1-\alpha)\\
&= p\ln(1+\alpha)+(1-p)\ln(1-\alpha)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right]=p\ln(1+\alpha)+(1-p)\ln(1-\alpha).}$

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

Optimisation : le critère de Kelly

On pose, pour tout $x\in[0,1[$, $f(x)=p\ln(1+x)+(1-p)\ln(1-x)$.

□ **8—** étude de f.

■ **8.1.** f est C^2 sur $]0,1[$ (car $1+x>0$ et $1-x>0$) et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{p}{1+x}-\frac{1-p}{1-x}\\
&= \frac{2p-1-x}{1-x^2>0}\\
f''(x) &= \frac{x^2-1+2x(2p-1-x)}{(1-x^2)^2}\\
&= \frac{-x^2+2(2p-1)x-1}{(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

Soit g la fonction définie par $g(x)=-x^2+2(2p-1)x-1$ pour tout $x\in]0;1[$. La fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et $g'(x)=-2x+2(2p-1)=-2(x-(2p-1))$ et comme $1>p>\frac{1}{2}$ alors $2p-1\in]0,1[$ $g(2p-1)=-(2p-1)^2+2(2p-1)^2-1=(2p-1)^2-1<0$ car $2p-1\in]0,1[$

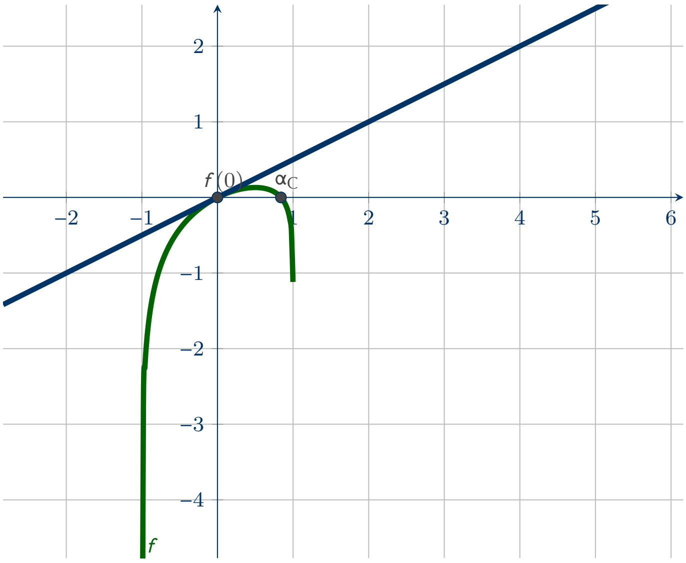
	0	$2p-1$	1
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow -$	$g(2p-1)<0$	$\searrow -$
$f''(x)$	$-$		$-$
$2p-1-x$	$+$	0	$-$ affine
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 $\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$

Conclusion : $\boxed{f''<0 \text{ et atteint son maximum en } \alpha_K=2p-1}$

■ **8.2.** On a $\lim_{x\to1}f(x)=-\infty$ par simples opérations sur les limites. Quand la proportion rejouée (α) tend vers 1, la croissane moyenne du capital tend vers $-\infty$ (on cours à la ruine).

■ **8.3.** Comme $f(0)=0$ et que f est strictement croissante sur $[0,\alpha_K]$ alors $f(\alpha_K)>0$. Comme f est continue et strictement décroissante sur $[\alpha_k,1[$ elle est bijective de $[\alpha_k,1[$ dans $\left|\lim_1 f, f(\alpha_k)\right|=]-\infty,f(\alpha_K)]$. Et comme $0<f(\alpha_K)$ alors $0\in]-\infty,f(\alpha_K)]$. Donc $f(x)=0$ a une unique solution dans $\alpha_c\in[\alpha_k,1[$ qui n'est pas α_K *Conclusion :* $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ s'annule deux fois exactement sur } [0,1[: \\ \text{en } 0 \text{ et en un réel } \alpha_c \text{ vérifiant } \alpha_K<\alpha_c. \end{array}}$

■ **8.4.** Asymptote verticale en 1. Tangente en 0 de coefficient directeur : $f'(0)=2p-1>0$. Voici un tracé pour par exemple $p=\frac{3}{4}$.



□ **9—** Conclusion : le choix $\alpha = \alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme. Pour $p = \frac{1}{2}$, on aurait $\alpha_K = 0$ donc quand on a autant de chances da gagner que de perdre, pour gagner en moyenne, il vaut mieux ne rien miser. Pour $p = 1$ on a $\alpha_K = 1$ donc quand on est sûr de gagner, on peut tout miser à chaque fois.

Étude de la valeur critique α_c

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\frac{1}{2}$.

On considèrera dans ce qui suit que α, est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

□ **10—** On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

■ **10.1.** La fonction φ est continue en x tel que $1+x>0$ et $1-x>0$ et $\ln(1-x) \neq 0$ donc sur $]0,1[$ comme composée et quotient de fonctions continues. En 0 : $\dfrac{\ln(1+x) \to 0}{\ln(1-x) \to 0}$ forme indétermnée et $\varphi(x) \sim \dfrac{x}{-x} = -1 \to -1$.

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable en } 0 \text{ par } \varphi(0) = -1}$ En 1 : $\dfrac{\ln(1+x) \to \ln(2)}{\ln(1-x) \to -\infty} \to 0$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable en } 0 \text{ par } \varphi(1) = 0.}$

■ **10.2.** φ est dérivable sur $]0,1[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables ($1+x>0$ et $1-x>0$ et $\ln(1-x) \neq 0$.)

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\ln(1+x)}{[\ln(1+x)]^2} \\
&= \frac{(1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)}{(1-x^2)[\ln(1+x)]^2} \\
&= \frac{h(x)}{(1-x^2)[\ln(1-x)]^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{avec } h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x).}$

■ **10.3.** h est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -\ln(1-x) - 1 + \ln(1+x) + 1 \\
&= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

Pour $x \in]0,1[$ on a $0 < 1-x < 1+x$ donc $\dfrac{1+x}{1-x} > 1$ et $h'(x) > 0$
En 0 : $(1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x) \to 0$
En 1 : avec $h = 1-x \to 0^+$ on a $(1-x)\ln(1-x) = h\ln(h) = \dfrac{\ln(h)}{1/h} \to 0$ car $\ln(h) = o(1/h)$ donc $h(x) \to 2\ln(2)$.

x	0		1
$h(x)$	0	$\nearrow +$	$2\ln(2)$

■ **10.4.** On a donc $\varphi' > 0$ sur $]0,1[$ et donc φ est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ et donc bijective de $[0,1]$ dans $[\varphi(0), \varphi(1)] = [-1,0]$.

□ **11—** On a et avec $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$

Le taux d'accroissement en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} &= \frac{\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}+1}{x} \\
&= \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)} \\
&= \frac{x-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)-x+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(-x)}{x(-x+x\varepsilon_1(x))} \\
&= \frac{-x^2+x^2\varepsilon_2(x)}{x^2(-1+\varepsilon_1(x))} \\
&= \frac{-1+\varepsilon_2(x)}{-1+\varepsilon_1(x)} \to 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0)=1.}$

□ **12—**

■ **12.1.** Pour $p\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ on $f(\alpha_c)=0$ donc $p\ln(1+\alpha_c)+(1-p)\ln(1-\alpha_c)=0$ donc $\dfrac{\ln(1+\alpha_c)}{\ln(1-\alpha_c)}=\dfrac{p-1}{p}=1-\dfrac{1}{p}$ et $\varphi(\alpha_c)=1-\dfrac{1}{p}$ Et comme $\alpha_c\in[0,1]$ alors

Conclusion : $\boxed{\forall p\in\left]\frac{1}{2},1\right[,\quad \alpha_c(p)=\varphi^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$

■ **12.2.** Quand $p\to\frac{1}{2}^+$ on a alors $1-\dfrac{1}{p}\to -1^+$ et comme $\varphi(x)\to -1$ quand $x\to 0$ alors $\varphi^{-1}(x)\to 0$ quand $x\to -1$ donc $\varphi^{-1}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\to 0$ quand $p\to\dfrac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\alpha_c \text{ est prolongeable par continuité en } \frac{1}{2} \text{ par } \alpha_c\left(\frac{1}{2}\right)=0.}$ La fonction prolongée est alors donnée par $\alpha_c(p)=\varphi^{-1}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$. La fonction φ est dérivable sur $[0,1[$ et $\varphi'>0$ alors φ^{-1} est dérivable sur $[-1,0[$ et

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}$$

donc α_c est dérivable en p tel que $p\neq 0$ et $1-\dfrac{1}{p}\in[-1,0[$, donc sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right[$ et

$$\begin{aligned}
\alpha_c'(p) &= \left(\varphi^{-1}\right)'\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p^2} \\
\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) &= 4\left(\varphi^{-1}\right)'(-1)=\frac{4}{\varphi'(0)}=4
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{ce prolongement est dérivable en } \frac{1}{2} \text{ et } \alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right)=4}$

■ **12.3.** La dérivé en $\dfrac{1}{2}$ est la lmite du taux d'acfroissement :

$$\frac{\alpha_c(p)-\alpha_c\left(\frac{1}{2}\right)}{p-\frac{1}{2}}\to 4 \text{ donc } \frac{\alpha_c(p)-0}{2(2p-1)}\to 1$$

Conclusion : $\boxed{\text{au voisinage de } \frac{1}{2} : \alpha_c \sim 2\alpha_K.}$