Toute l'intégration cette semaine. Le TD sur les intégrales généralisées étant tout frais, on restera si possible sur des exercices standards de détermination de nature d'intégrale pour cette semaine.

1. Intégration

Attention

Le cours sur les intégrales généralisées ne comprend pas de règles avec des petit o ou équivalents, seulement l'encadrement de fonctions positives. Les étudiants doivent donc retraduire la relation de comparaison avec des inégalités.
Comme pour les séries, le critère de Riemann a été vu, mais n'est pas non plus au programme : les étudiants sont donc censés le redémontrer pour le α en question.

❶ **Primitives, intégration sur un segment.** Définition d'une primitive, existence pour les fonctions continues admise. Définition de l'intégrale comme le crochet d'une primitive pour les fonctions continues, puis continues par morceaux. Notion de valeur moyenne, lien intégrale à borne variable/primitive. Intégrale à deux bornes variables. Sommes de Riemann, théorème de convergence, intégration numérique (méthode des rectangles G/D). Propriétés de l'intégrale, intégrale nulle d'une fonction positive continue. Inégalité de Cauchy-Scwharz. Intégration par parties, changement de variable. Intégrale d'une fraction rationnelle.

❷ **Intégrale sur un intervalle quelconque.** Généralités. Intégrale généralisée sur des intervalles du type $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$ avec $a,b \in \overline{\mathbf{R}}$. Intégrales faussement impropres. Contre-exemple du fait que la convergence de l'intégrale sur $[a,\infty[$ n'entraîne pas la convergence vers zéro de la fonction. Notion d'intégrale partielle, de reste d'intégrale. Extension aux intégrales de fonctions continues sauf en un nombre **fini** de points (l'intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux n'est quant à elle pas au programme). Critère de Riemann au voisinage de zéro et de $+\infty$, intégrale de Gauß. Propriétés de l'intégrale. Intégrale nulle d'une fonction positive. Intégration par parties, changements de variables dans les intégrales généralisées. Critères propres aux fonctions positives : les intégrales partielles sont monotones, critère de comparaison. Convergence absolue/intégrabilité. Intégrales semi-convergentes. Inégalité triangulaire, structure d'espace vectoriel des fonctions d'intégrale absolument convergente.

Questions de cours.

- ✓ python Énoncé du théorème de convergence des sommes de Riemann. Fonction Python implémentant la méthode des rectangles Gauche et Droite.
- ✓ Formule de changement de variable, démonstration.
- ✓ Formule d'intégration par parties, démonstration.
- ✓ Notion d'intégrale absolument convergente et semi-convergente. Convergence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
- ✓ Énoncé du théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives. Si $f \sim_g b$ avec $f,g : [a,b[\longrightarrow \mathbf{R}^+$, montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

Au programme de la semaine suivant : le début des variables aléatoires à densité.

Variables et couples aléatoires discrets. Révisions d'intégration sur un segment.

Je souhaiterais que chaque étudiant ait un calcul d'intégral rapide en début de colles.

1. Variables & Vecteurs aléatoires discrets

❶ **Généralités.** Définition d'une variable aléatoire discrète, d'un couple aléatoire discret. Notation $\sum_{x \in X(\Omega)} (\dots)$ lorsqu'il y a convergence absolue ; la valeur de la somme ne dépend pas de l'énumération des éléments de $X(\Omega)$. Système complet d'évènements associé à une variable aléatoire discrète.

❷ **Variables aléatoires discrètes.** Loi et loi conditionnelle d'une variable aléatoire réelle discrète. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète caractérise la loi, expression de la loi en fonction de la fonction de répartition. Propriétés (somme, produit, image, min et max de variables aléatoires discrètes). Existence d'une variable aléatoire réelle discrète associée à une famille de réels positifs de somme un. Propriétés de la fonction de répartition. Indépendance. Existence d'une espérance/intégrabilité. Si une variable aléatoire admet une espérance, alors $\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in \mathbf{N}^\star} \mathbf{P}(X \geqslant n)$ si $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$; application aux calculs d'espérance de minimums et maximums de variables discrètes. Théorème de transfert. Définition de la variance, et propriétés. Inégalités de concentration (rappels et nouvelle preuve de l'inégalité de Markov dans le cas discret). Lois discrètes usuelles : uniforme discrète (définition, propriétés et simulation), Bernoulli (définition, propriétés et simulation), binomiale (définition, propriétés et simulation), hypergéométrique (définition, propriétés), géométrique (définition, propriétés, simulation), Poisson (définition, propriétés, simulation). Approximation de la loi de poisson par la loi binomiale.

> ⚠ **Attention**
>
> La technique générale de la simulation à l'aide du pseudo-inverse de la fonction de répartition n'est pas au programme. J'ai seulement donné **quelques idées** pour motiver la technique de simulation de la loi de Poisson.

❸ **Couples aléatoires discrets.** Rappel du théorème de Fubini pour les sommes doubles (admis), et notation $\sum_{(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (..)$ lorsque les hypothèses de Fubini sont vérifiées. Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles, d'un couple aléatoire. Présentation sous forme d'un tableau à deux entrées lorsque les supports sont finis. Propriétés (somme, produit scalaire, image par une fonction) des couples aléatoires discrets. Loi d'une somme de variables indépendantes, expression en fonction de la loi conjointe et application aux lois classiques. Espérance d'un couple. Théorème de transfert. Conséquences : linéarité de l'espérance, covariance sous forme d'une série double, espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes, expression de la variance d'une somme. Formule générale pour la variance d'une somme lorsque les variables aléatoires sont corrélées.

Questions de cours.

- ✓ python Loi binomiale : définition et simulation. Expression de l'espérance et de la variance (avec démonstration).
- ✓ python Loi de Poisson ; définition. Simulation. Espérance et variance sans démonstration. Approximation de la loi de Poisson par une famille de variables suivant une binomiale (avec démonstration).
- ✓ python Loi Géométrique ; définition. Simulation. Espérance et variance (avec démonstration).
- ✓ Définition d'une loi conjointe, conditionnelle (sachant la valeur d'une des deux variables uniquement), marginale. Expliquer, preuve à l'appui, les liens entre les différentes lois.
- ✓ Expression de la loi d'une somme de deux variables aléatoires $X+Y$ telles que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbf{N}$ en fonction de la loi conjointe de (X, Y), cas où elles sont indépendantes. Application aux sommes de variables indépendantes suivant une loi de Poisson (avec démonstration).

2. Intégration

❶ **Primitives, intégration sur un segment.** Définition d'une primitive, existence pour les fonctions continues admise. Définition de l'intégrale comme le crochet d'une primitive pour les fonctions continues, puis continues par morceaux. Notion de valeur moyenne, lien intégrale à borne variable/primitive. Intégrale à deux bornes variables. Sommes de Riemann, théorème de convergence, intégration numérique (méthode des rectangles G/D). Propriétés de l'intégrale, intégrale nulle d'une fonction positive continue. Inégalité de Cauchy-Scwharz. Intégration par parties, changement de variable. Intégrale d'une fraction rationnelle.

Questions de cours.

- ✓ python Énoncé du théorème de convergence des sommes de Riemann. Fonction Python implémentant la méthode des rectangles Gauche et Droite.
- ✓ Formule de changement de variable, démonstration.
- ✓ Formule d'intégration par parties, démonstration.

Au programme de la semaine suivant : toute l'intégration.

Bonnes vacances et fêtes de fin d'année !

Probabilités, variables et couples aléatoires discrets.

1. Dénombrement, Espaces probabilisés & Variables aléatoires

❶ **Dénombrement.** Fonction indicatrice d'un ensemble et propriétés. Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal. Listes, permutations, combinaisons, cardinaux associés. Propriétés des coefficients binomiaux.

> **⚠ Attention**
>
> Conformément au programme, aucun exercice spécifique aux tribus ne doit être proposé.

❷ **Axiomatique des probabilités.** Univers et espaces probabilisables, notion de tribu. Propriétés des tribus. Notion de probabilité, ensembles certains/négligeables, propriétés d'une probabilité, majoration de la probabilité d'une réunion *a priori* non dis-jointe. L'ensemble des proabbilités n'est un pas un sous-espace vectoriel de $[0,1]^{\mathcal{T}}$, la stabilité par combinaison convexe a été mentionnée sans preuve. Nombreux exemples d'expériences aléatoires, y compris le jeu de pile/face infini où l'existence d'une tribu contenant les évènements cylindriques est admise. Existence d'une probabilité associée à une famille (finie ou dénombrable) de somme un. Conditionnement & indépendance, formules de Bayes, des probabilités totales, des probabilités composées. Indépendance d'évènements : définition.

❸ **Variables et vecteurs aléatoires — généralités.** Définition, ensemble noté $L^0(\Omega)$. Structure d'espace vectoriel de $L^0(\Omega)$, produit de variables aléatoires réelles, maximum et minimum de variables aléatoires, image par une application continue. Fonction de répartition, loi. Propriétés d'une fonction de répartition (croissante, c.à.d.l.a.g., limites et propriétés probabilistes). Représentation en histogramme d'une loi.

❹ **Espérance — généralités.** Admis : il existe une application linéaire $\mathbf{E}$ de l'ensemble des variables positives dans $\overline{\mathbf{R}}$ telle que

1. $\mathbf{E}(1) = 1$, $\mathbf{E}(0) = 0$.
2. Si $A \in \mathcal{T}$, alors $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.
3. *Croissance* – si X, Y sont deux variables aléatoires réelles positives telles que $X \leqslant Y$, alors $0 \leqslant \mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.
4. *Positivité* – $X \geqslant 0 \implies \mathbf{E}(X) \geqslant 0$. Et dans ce cas $\mathbf{E}(X) = 0 \iff X = 0$ p.s ($i.e. \mathbf{P}(X = 0) = 1$).

Extension aux variables réelles de signe quelconque à l'aide des parties positives/négatives lorsque X admet une espérance : $\mathbf{E}(|X|) < \infty$. L'existence sera justifiée dans le prochain chapitre pour les variables discrètes et un peu plus tard pour les variables continues. Retour à la formule de l'espérance de première année pour les variables aléatoires à support fini : exemple sur la loi de Bernoulli, binomiale. Propriétés de l'espérance. Définition de la variance si X^2 admet une espérance et plus généralement des moments d'ordre k (ensemble $L^k(\omega)$). Covariance, et écart-type. Propriétés de la variance/covariance, variance d'une somme de variables aléatoires non corrélées. Inégalité de Cauchy-Schwarz et définition du coefficient de corrélation. Opération de centrage-réduction. Inégalités de concentration : Markov, Markov avec un majorant en $\mathbf{E}\left(|X|^k\right)/a^k$ pour $a > 0$, $k \in \mathbf{N}$, et Bienaymé-Tchebycheff. Indpendance de variables aléatoires réelles, conséquence : dans ce cas l'espérance d'un produit est le produit des espérance (admis pour le moment), et l'indépendance implique la non corrélation deux à deux. Lemme des coalitions et fonctions de variables aléatoires indépendantes, notion de variables i.i.d.. Moyenne empirique et loi faible des grands nombres si la loi admet un moment d'ordre deux.

---

2. Variables & Vecteurs aléatoires discrets

❶ **Généralités.** Définition d'une variable aléatoire discrète, d'un couple aléatoire discret. Notation $\sum_{x \in X(\Omega)} (\ldots)$ lorsqu'il y a convergence absolue ; la valeur de la somme ne dépend pas de l'énumération des éléments de $X(\Omega)$. Système complet d'évènements associé à une variable aléatoire discrète.

❷ **Variables aléatoires discrètes.** Loi et loi conditionnelle d'une variable aléatoire réelle discrète. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète caractérise la loi, expression de la loi en fonction de la fonction de répartition. Propriétés (somme, produit, image, min et max de variables aléatoires discrètes). Existence d'une variable aléatoire réelle discrète associée à une famille de réels positifs de somme un. Propriétés de la fonction de répartition. Indépendance. Existence d'une espérance/intégrabilité. Si une variable aléatoire admet une espérance, alors $\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in \mathbf{N}^\star} \mathbf{P}(X \geqslant n)$ si $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$; application aux calculs d'espérance de minimums et maximums de variables discrètes. Théorème de transfert. Définition de la variance, et propriétés. Inégalités de concentration (rappels et nouvelle preuve de l'inégalité de Markov dans le cas discret). Lois discrètes usuelles : uniforme discrète (définition, propriétés et simulation), Bernoulli (définition, propriétés et simulation), binomiale (définition, propriétés et simulation), hypergéométrique (définition, propriétés), géométrique (définition, propriétés, simulation), Poisson (définition, propriétés, simulation). Approximation de la loi de poisson par la loi binomiale.

> **⚠ Attention**
>
> La technique générale de la simulation à l'aide du pseudo-inverse de la fonction de répartition n'est pas au programme. J'ai seulement donné **quelques idées** pour motiver la technique de simulation de la loi de Poisson.

❸ **Couples aléatoires discrets.** Rappel du théorème de Fubini pour les sommes doubles (admis), et notation $\sum_{(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (..)$ lorsque les hypothèses de Fubini sont vérifiées. Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles, d'un couple aléatoire. Présentation sous forme d'un tableau à deux entrées lorsque les supports sont finis. Propriétés (somme, produit scalaire, image par une fonction) des couples aléatoires discrets. Loi d'une somme de variables indépendantes, expression en fonction de la loi conjointe et application aux lois classiques. Espérance d'un couple. Théorème de transfert. Conséquences : linéarité de l'espérance, covariance sous forme d'une série double, espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes, expression de la variance d'une somme. Formule générale pour la variance d'une somme lorsque les variables aléatoires sont corrélées.

Questions de cours.

- ✓ Loi binomiale : définition et simulation. Expression de l'espérance et de la variance (avec démonstration).
- ✓ Loi de Poisson ; définition. Simulation. Espérance et variance sans démonstration. Approximation de la loi de Poisson par une famille de variables suivant une binomiale (avec démonstration).
- ✓ Loi Géométrique ; définition. Simulation. Espérance et variance (avec démonstration).
- ✓ Définition d'une loi conjointe, conditionnelle (sachant la valeur d'une des deux variables uniquement), marginale. Expliquer, preuve à l'appui, les liens entre les différentes lois.
- ✓ Expression de la loi d'une somme de deux variables aléatoires $X+Y$ telles que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbf{N}$ en fonction de la loi conjointe de (X, Y), cas où elles sont indépendantes. Application aux sommes de variables indépendantes suivant une loi de Poisson (avec démonstration).

Au programme de la semaine de la rentrée : le début de l'intégration.

Bonnes vacances et fêtes de fin d'année !

Axiomatique des probabilités, généralités sur les variables aléatoires, variables aléatoires discrètes.

1. Dénombrement, Espaces probabilisés & Variables aléatoires

❶ **Dénombrement.** Fonction indicatrice d'un ensemble et propriétés. Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal. Listes, permutations, combinaisons, cardinaux associés. Propriétés des coefficients binomiaux.

> **⚠ Attention**
>
> Conformément au programme, aucun exercice spécifique aux tribus ne doit être proposé.

❷ **Axiomatique des probabilités.** Univers et espaces probabilisables, notion de tribu. Propriétés des tribus. Notion de probabilité, ensembles certains/négligeables, propriétés d'une probabilité, majoration de la probabilité d'une réunion *a priori* non dis-jointe. L'ensemble des proabbilités n'est un pas un sous-espace vectoriel de $[0,1]^{\mathcal{T}}$, la stabilité par combinaison convexe a été mentionnée sans preuve. Nombreux exemples d'expériences aléatoires, y compris le jeu de pile/face infini où l'existence d'une tribu contenant les évènements cylindriques est admise. Existence d'une probabilité associée à une famille (finie ou dénombrable) de somme un. Conditionnement & indépendance, formules de Bayes, des probabilités totales, des probabilités composées. Indépendance d'évènements : définition.

❸ **Variables et vecteurs aléatoires — généralités.** Définition, ensemble noté $L^0(\Omega)$. Structure d'espace vectoriel de $L^0(\Omega)$, produit de variables aléatoires réelles, maximum et minimum de variables aléatoires, image par une application continue. Fonction de répartition, loi. Propriétés d'une fonction de répartition (croissante, c.à.d.l.a.g., limites et propriétés probabilistes). Représentation en histogramme d'une loi.

❹ **Espérance — généralités.** Admis : il existe une application linéaire $\mathbf{E}$ de l'ensemble des variables positives dans $\overline{\mathbf{R}}$ telle que

1. $\mathbf{E}(1) = 1$, $\mathbf{E}(0) = 0$.
2. Si $A \in \mathcal{T}$, alors $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.
3. *Croissance* – si X, Y sont deux variables aléatoires réelles positives telles que $X \leqslant Y$, alors $0 \leqslant \mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.
4. *Positivité* – $X \geqslant 0 \implies \mathbf{E}(X) \geqslant 0$. Et dans ce cas $\mathbf{E}(X) = 0 \iff X = 0$ p.s ($i.e.\mathbf{P}(X=0)=1$).

Extension aux variables réelles de signe quelconque à l'aide des parties positives/négatives lorsque X admet une espérance : $\mathbf{E}(|X|) < \infty$. L'existence sera justifiée dans le prochain chapitre pour les variables discrètes et un peu plus tard pour les variables continues. Retour à la formule de l'espérance de première année pour les variables aléatoires à support fini : exemple sur la loi de Bernoulli, binomiale. Propriétés de l'espérance. Définition de la variance si X^2 admet une espérance et plus généralement des moments d'ordre k (ensemble $L^k(\omega)$). Covariance, et écart-type. Propriétés de la variance/covariance, variance d'une somme de variables aléatoires non corrélées. Inégalité de Cauchy-Schwarz et définition du coefficient de corrélation. Opération de centrage-réduction. Inégalités de concentration : Markov, Markov avec un majorant en $\mathbf{E}\left(|X|^k\right)/a^k$ pour $a > 0$, $k \in \mathbf{N}$, et Bienaymé-Tchebycheff. Indpendance de variables aléatoires réelles, conséquence : dans ce cas l'espérance d'un produit est le produit des espérance (admis pour le moment), et l'indépendance implique la non corrélation deux à deux. Lemme des coalitions et fonctions de variables aléatoires indépendantes, notion de variables i.i.d.. Moyenne empirique et loi faible des grands nombres si la loi admet un moment d'ordre deux.

✣ *Questions de cours.*

- ✓ Définition de la variance et covariance. Inégalité de Cauchy-Scwharz (avec démonstration) et définition du coefficient de corrélation.
- ✓ Inégalités de concentration : Markov, Markov avec un majorant en $\mathbf{E}\left(|X|^k\right)/a^k$ pour $a > 0$, $k \in \mathbf{N}$ puis Bienaymé-Tchebycheff (énoncés et démonstrations).
- ✓ Rappel de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff (sans démonstration). Énoncé de la loi faible des grands nombres avec démonstration. Application à une loi classique finie au choix du colleur.

2. Variables & Vecteurs aléatoires discrets

❶ **Généralités.** Définition d'une variable aléatoire discrète, d'un couple aléatoire discret. Notation $\sum_{x \in X(\Omega)} (\ldots)$ lorsqu'il y a convergence absolue ; la valeur de la somme ne dépend pas de l'énumération des éléments de $X(\Omega)$. Système complet d'évènements associé à une variable aléatoire discrète.

❷ **Variables aléatoires discrètes.** Loi et loi conditionnelle d'une variable aléatoire réelle discrète. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète caractérise la loi, expression de la loi en fonction de la fonction de répartition. Propriétés (somme, produit, image, min et max de variables aléatoires discrètes). Existence d'une variable aléatoire réelle discrète associée à une famille de réels positifs de somme un. Propriétés de la fonction de répartition. Indépendance.

❸ **Espérance, variance, moments.** Existence d'une espérance/intégrabilité. Si une variable aléatoire admet une espérance, alors $\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in \mathbf{N}^\star} \mathbf{P}(X \geqslant n)$ si $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$; application aux calculs d'espérance de minimums et maximums de variables discrètes. Théorème de transfert. Définition de la variance, et propriétés. Inégalités de concentration (rappels et nouvelle preuve de l'inégalité de Markov dans le cas discret). Lois discrètes usuelles : uniforme discrète (définition, propriétés et simulation), Bernoulli (définition, propriétés et simulation), binomiale (définition, propriétés et simulation), hypergéométrique (définition, propriétés), géométrique, Poisson (définition, propriétés). Approximation de la loi de poisson par la loi binomiale.

Attention

Les propriétés sur les sommes de lois usuelles indépendantes (hors loi de Bernoulli) n'ont pas encore été vues. La simulation d'une loi de Poisson n'est pas encore au programme de cette semaine.

Questions de cours.

- ✓ Définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète. Formule des cumulants (avec démonstration) : si $X \in L^0(\Omega, \mathbf{R})$ une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$, et possédant une espérance. Alors :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \in \mathbf{N}^\star} \mathbf{P}(X \geqslant k).$$

- ✓ python Loi binomiale : définition et simulation. Expression de l'espérance et de la variance (avec démonstration).
- ✓ Loi de Poisson ; définition. Espérance et variance sans démonstration. Approximation de la loi de Poisson par une famille de variables suivant une binomiale (avec démonstration).

Au programme de la semaine suivante : les variables aléatoires réelles discrètes et couples aléatoires discrets.

Axiomatique des probabilités, généralités sur les variables aléatoires. Révisions sur les lois discrètes de première année.

1. Dénombrement, Espaces probabilisés & Variables aléatoires

❶ **Dénombrement.** Fonction indicatrice d'un ensemble et propriétés. Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal. Listes, permutations, combinaisons, cardinaux associés. Propriétés des coefficients binomiaux.

> **Attention**
>
> Conformément au programme, aucun exercice spécifique aux tribus ne doit être proposé.

❷ **Axiomatique des probabilités.** Univers et espaces probabilisables, notion de tribu. Propriétés des tribus. Notion de probabilité, ensembles certains/négligeables, propriétés d'une probabilité, majoration de la probabilité d'une réunion *a priori* non dis-jointe. L'ensemble des proabbilités n'est un pas un sous-espace vectoriel de $[0,1]^{\mathcal{T}}$, la stabilité par combinaison convexe a été mentionnée sans preuve. Nombreux exemples d'expériences aléatoires, y compris le jeu de pile/face infini où l'existence d'une tribu contenant les évènements cylindriques est admise. Existence d'une probabilité associée à une famille (finie ou dénombrable) de somme un. Conditionnement & indépendance, formules de Bayes, des probabilités totales, des probabilités composées. Indépendance d'évènements : définition.

❸ **Variables et vecteurs aléatoires — généralités.** Définition, ensemble noté $L^0(\Omega)$. Structure d'espace vectoriel de $L^0(\Omega)$, produit de variables aléatoires réelles, maximum et minimum de variables aléatoires, image par une application continue. Fonction de répartition, loi. Propriétés d'une fonction de répartition (croissante, c.à.d.l.a.g., limites et propriétés probabilistes). Représentation en histogramme d'une loi.

❹ **Espérance — généralités.** Admis : il existe une application linéaire $\mathbf{E}$ de l'ensemble des variables positives dans $\overline{\mathbf{R}}$ telle que

❶ $\mathbf{E}(1) = 1$, $\mathbf{E}(0) = 0$.

❷ Si $A \in \mathcal{T}$, alors $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.

❸ *Croissance* – si X, Y sont deux variables aléatoires réelles positives telles que $X \leqslant Y$, alors $0 \leqslant \mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

❹ *Positivité* – $X \geqslant 0 \implies \mathbf{E}(X) \geqslant 0$. Et dans ce cas $\mathbf{E}(X) = 0 \iff X = 0$ p.s ($i.e.\mathbf{P}(X=0)=1$).

Extension aux variables réelles de signe quelconque à l'aide des parties positives/négatives lorsque X admet une espérance : $\mathbf{E}(|X|) < \infty$. L'existence sera justifiée dans le prochain chapitre pour les variables discrètes et un peu plus tard pour les variables continues. Retour à la formule de l'espérance de première année pour les variables aléatoires à support fini : exemple sur la loi de Bernoulli, binomiale. Propriétés de l'espérance. Définition de la variance si X^2 admet une espérance et plus généralement des moments d'ordre k (ensemble $L^k(\omega)$). Covariance, et écart-type. Propriétés de la variance/covariance, variance d'une somme de variables aléatoires non corrélées. Inégalité de Cauchy-Schwarz et définition du coefficient de corrélation. Opération de centrage-réduction. Inégalités de concentration : Markov, Markov avec un majorant en $\mathbf{E}\left(|X|^k\right)/a^k$ pour $a > 0$, $k \in \mathbf{N}$, et Bienaymé-Tchebycheff. Indpendance de variables aléatoires réelles, conséquence : dans ce cas l'espérance d'un produit est le produit des espérance (admis pour le moment), et l'indépendance implique la non corrélation deux à deux. Lemme des coalitions et fonctions de variables aléatoires indépendantes, notion de variables i.i.d.. Moyenne empirique et loi faible des grands nombres si la loi admet un moment d'ordre deux.

> **Attention**
>
> Les étudiants doivent revoir leurs lois de première années pour cette semaine de colles (à support fini : Bernouilli, binomiale, uniforme, hypergéométrique). Aucune loi à support dénombrable n'a encore été abordée dans ce chapitre.

Questions de cours.

- ✓ Formule des probabilités totales et composées : énoncés et démonstrations.
- ✓ Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Formules donnant la probabilité de $B \backslash A$, d'une réunion $A \cup B$ et monotonie $A \subset B \implies \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ où $A, B \in \mathcal{T}$: énoncés et démonstrations.
- ✓ Définition de la variance et covariance. Propriétés : variance d'une expression aléatoire affine, formule de König-Huygens pour la covariance, variance d'une somme de deux variables aléatoires non corrélées (avec démonstrations).
- ✓ Définition de la variance et covariance. Inégalité de Cauchy-Scwharz (avec démonstration) et définition du coefficient de corrélation.
- ✓ Inégalités de concentration : Markov, Markov avec un majorant en $\mathbf{E}\left(|X|^k\right)/a^k$ pour $a > 0$, $k \in \mathbf{N}$ puis Bienaymé-Tchebycheff (énoncés et démonstrations).
- ✓ Rappel de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff (sans démonstration). Énoncé de la loi faible des grands nombres avec démonstration. Application à une loi classique finie au choix du colleur.

Au programme de la semaine suivante : les variables aléatoires réelles discrètes et couples aléatoires discrets.

Suites & Séries numériques. Début des probabilités.

Attention

Je souhaiterais que chaque étudiant ait un terme général de série numérique ou une suite récurrente simple du type $u_{n+1} = f(u_n)$ à traiter en début de colle.

1. Suites & Séries Numériques

Attention

Le cours sur les séries ne comporte notamment pas : la règle de D'Alembert, les théorèmes de comparaison de séries à termes positifs exprimés sous forme de relation o() ou ∼. Les étudiants doivent donc se ramener à des inégalités (éventuellement *via* des o() ou ∼). Le critère de Riemann a été vu, mais n'est pas non plus au programme : les étudiants sont donc censés se ramener à $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ uniquement.

1. **Suites numériques.** Définition d'une suite, méthode informatique pour représenter les termes successifs d'une suite, monotonie et borne. Notion de limite en un élément de $\overline{\mathbf{R}}$, passages à la limite, propriétés de la limite. Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration. Convergence des suites extraites paires/impaires (attention, pas de résultats sur les autres sous-suites extraites au programme). Limite monotone. Rapide extension aux suites complexes. Suites remarquables : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux et récurrences générales à un pas du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour ces dernières, quelques exemples ont été vus, mais aucun résultat général n'est au programme : les étudiants doivent donc être capables de justifier les éventuelles propriétés utilisées.
2. **Séries numériques.** Généralités : notion de somme partielle, convergence/divergence d'une série, reste d'une série convergente, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes et somme associée. Séries remarquables : géométrique, géométrique dérivée (convergence provisoirement admise, la valeur de la somme sera admise), série exponentielle (valeur de la somme admise), divergence de la série harmonique, convergence de la série $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$, convergence de $\left(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ vers $\ln 2$: la preuve a été faite en TD. Condition nécessaire de convergence et divergence grossière. Lien suite/série *via* les séries téléscopiques. Séries à termes positifs, monotonie de la somme partielle dans ce cas, critère de comparaison des séries à termes positifs. Séries de Riemann & technique de comparaison série-intégrale ([H.P]). Séries à termes quelconques : partie positive/négative d'une suite, convergence absolue, la convergence absolue implique celle des parties positives et négatives. Structure d'espace vectoriel des séries absolument convergentes. Inégalité triangulaire généralisée.

Questions de cours.

- ✓ Nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$.
- ✓ L'ensemble des séries absolument convergentes ℓ^1 forme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites numériques. Nature de $\sum \frac{\cos n}{n^2}$.
- ✓ Convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$, et majoration $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

2. Dénombrement, Espaces probabilisés & Variables aléatoires

1. **Dénombrement.** Fonction indicatrice d'un ensemble et propriétés. Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal. Listes, permutations, combinaisons, cardinaux associés. Propriétés des coefficients binomiaux.

Attention

Conformément au programme, aucun exercice spécifique aux tribus ne doit être proposé.

2. **Axiomatique des probabilités.** Univers et espaces probabilisables, notion de tribu. Propriétés des tribus. Notion de probabilité, ensembles certains/négligeables, propriétés d'une probabilité, majoration de la probabilité d'une réunion *a priori* non dis-jointe. L'ensemble des proabbilités n'est un pas un sous-espace vectoriel de $[0,1]^{\mathcal{T}}$, la stabilité par combinaison convexe a été mentionnée sans preuve. Nombreux exemples d'expériences aléatoires, y compris le jeu de pile/face infini où l'existence d'une tribu contenant les évènements cylindriques est admise. Existence d'une probabilité associée à une famille (finie ou dénombrable) de somme un. Conditionnement & indépendance, formules de Bayes, des probabilités totales, des probabilités composées. Indépendance d'évènements : définition.

Questions de cours.

- ✓ Formule des probabilités totales et composées : énoncés et démonstrations.
- ✓ Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Formules donnant la probabilité de $B \backslash A$, d'une réunion $A \cup B$ et monotonie $A \subset B \implies \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ où $A, B \in \mathcal{T}$: énoncés et démonstrations.

Au programme de la semaine suivante : les variables aléatoires réelles, révisions de première année sur les variables aléatoires discrètes à support fini.

Révisions générales d'algèbre linéaire (dernière semaine) : espaces vectoriels et applications linéaires. On ajoute les suites & séries numériques.

Attention

Nous avons commencé le cours sur les séries jeudi donc cette semaine, sur les séries, uniquement des questions de cours. On proposera des exercices sur les séries à partir de la semaine du 19/11.

1. Espaces Vectoriels

Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $E = \mathbf{K}^n$, elles sont généralisées ici.

❶ **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.

❷ **Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases.** Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices. Algorithme de la base incomplète et conséquences : théorème de la base extraite/incomplète.

❸ **Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.** Comparaison entre le nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice (résultat que nous avons admis). Définition de la dimension, toutes les bases ont même cardinal. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de dim E vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Dimension d'un produit cartésien. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré (nous n'avons pas encore vu qu'il s'agit du rang de la matrice associée dans une base).

Ne pas hésiter à proposer en plus large quantité des exercices spécifiques au programme de 2ème année, notamment les espaces vectoriels de fonctions, de suites, de polynômes.

2. Applications Linéaires

Sur ce chapitre pour cette semaine, en revanche, les exercices doivent rester simples (peu d'exercices traités pour le moment) ; par exemple des calculs d'images et de noyaux.

❶ **Généralités.** Notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Cas des formes linéaires, endomorphisme identique et homothéties. Détermination des applications $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$-linéaires de $\mathbf{C}$, et des applications $\mathbf{K}$-linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^r$. Exemples faisant intervenir des polynômes, fonctions, suites. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau. Isomorphismes, automorphismes (notation $\mathcal{GL}(E)$ pour l'ensemble des automorphismes sur E, un espace vectoriel), l'inverse d'une bijection linéaire est linéaire, inverse d'une composée. Équations linéaires du type $f(x) = y_0$ avec $(x, y_0) \in E \times F$ où E, F sont deux espaces vectoriels et f une application linéaire $E \to F$ et structure de l'ensemble des solutions, mise en perspective avec le cas $E = \mathcal{D}^{1/2}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux vues précédemment.

❷ **Cas particulier de la dimension finie.** Image de familles de vecteurs, caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire en fonction de l'image d'une base de l'espace de départ. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension. Équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité pour des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension. Application à l'existence d'un polynôme interpolateur. Rang.

❸ **Représentation matricielle d'une application linéaire.** Rappels sur les matrices de première année. Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs. Matrice d'une application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau et image d'une matrice sont définis comme ceux de l'application linéaire canoniquement associée. Propriétés. Matrices de passage et changements de base. Relation de similitude et application aux calculs de puissance.

Questions de cours.

- ✓ (Énoncé & Preuve) Définition d'une image directe, réciproque. Les images directes et réciproques d'espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels de départ et d'arrivée **(preuve uniquement pour l'image directe).** *Insister sur la méthodologie.*
- ✓ Formule de changement de base pour un vecteur. Application à la base canonique et à celle tournée d'un angle θ dans $\mathbf{R}^2$.
- ✓ Formule de changement de base pour les applications linéaires. Énoncé et démonstration (avec l'aide de la formule donnant la matrice d'une composée d'applications, et l'identité).

3. Suites & Séries Numériques

❶ **Suites numériques.** Définition d'une suite, méthode informatique pour représenter les termes successifs d'une suite, monotonie et borne. Notion de limite en un élément de $\overline{\mathbf{R}}$, passages à la limite, propriétés de la limite. Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration. Convergence des suites extraites paires/impaires (attention, pas de résultats sur les autres sous-suites extraites au programme). Limite monotone. Rapide extension aux suites complexes. Suites remarquables : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux et récurrences générales à un pas du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour ces dernières, quelques exemples ont été vus, mais aucun résultat général n'est au programme : les étudiants doivent donc être capables de justifier les éventuelles propriétés utilisées.

❷ **Séries numériques.** Généralités : notion de somme partielle, convergence/divergence d'une série, reste d'une série convergente, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes et somme associée. Séries remarquables : géométrique, géométrique dérivée (convergence provisoirement admise, la valeur de la somme sera admise), série exponentielle (valeur de la somme admise), divergence de la série harmonique, convergence de la série $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$, convergence de $\left(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ vers $\ln 2$: la preuve a été faite en TD. Condition nécessaire de convergence et divergence grossière. Lien suite/série *via* les séries téléscopiques. Séries à termes positifs, monotonie de la somme partielle dans ce cas, critère de comparaison des séries à termes positifs.

Questions de cours.

✓ Suites adjacentes : définition, propriété de convergence (énoncé uniquement), application à la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ (exemple 5 **sans** la majoration du reste).

✓ Suites géométriques : définition, expression en fonction de n, convergence : énoncé. Expression de la somme des premiers termes (définition 14, théorème 15) : énoncé et démonstration.

✓ Condition nécessaire de convergence d'une série (proposition 7), divergence de la série $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ (exemple 14, 1.) : énoncé et preuve.

✓ Séries à termes positifs : monotonie de la somme partielle (preuve) et théorème de comparaison de séries à termes positifs (théorème 18) : énoncé et preuve.

Ma

Au programme de la semaine suivante : les suites & séries. Ensuite les probabilités générales & discrètes.

Révisions générales d'algèbre linéaire (dernière semaine) : espaces vectoriels et applications linéaires. On ajoute les suites & séries numériques.

⚠ Attention

Nous avons commencé le cours sur les séries jeudi donc cette semaine, sur les séries, uniquement des questions de cours. On proposera des exercices sur les séries à partir de la semaine du 19/11.

1. Espaces Vectoriels

Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $E = \mathbf{K}^n$*, elles sont généralisées ici.*

1. **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.
2. **Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases.** Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices. Algorithme de la base incomplète et conséquences : théorème de la base extraite/incomplète.
3. **Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.** Comparaison entre le nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice (résultat que nous avons admis). Définition de la dimension, toutes les bases ont même cardinal. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de dim E vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Dimension d'un produit cartésien. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré (nous n'avons pas encore vu qu'il s'agit du rang de la matrice associée dans une base).

Ne pas hésiter à proposer en plus large quantité des exercices spécifiques au programme de 2ème année, notamment les espaces vectoriels de fonctions, de suites, de polynômes.

2. Applications Linéaires

Sur ce chapitre pour cette semaine, en revanche, les exercices doivent rester simples (peu d'exercices traités pour le moment) ; par exemple des calculs d'images et de noyaux.

1. **Généralités.** Notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Cas des formes linéaires, endomorphisme identique et homothéties. Détermination des applications $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$-linéaires de $\mathbf{C}$, et des applications $\mathbf{K}$-linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^r$. Exemples faisant intervenir des polynômes, fonctions, suites. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau. Isomorphismes, automorphismes (notation $\mathcal{GL}(E)$ pour l'ensemble des automorphismes sur E, un espace vectoriel), l'inverse d'une bijection linéaire est linéaire, inverse d'une composée. Équations linéaires du type $f(x) = y_0$ avec $(x, y_0) \in E \times F$ où E, F sont deux espaces vectoriels et f une application linéaire $E \to F$ et structure de l'ensemble des solutions, mise en perspective avec le cas $E = \mathcal{D}^{1/2}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux vues précédemment.
2. **Cas particulier de la dimension finie.** Image de familles de vecteurs, caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire en fonction de l'image d'une base de l'espace de départ. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension. Équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité pour des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension. Application à l'existence d'un polynôme interpolateur. Rang.
3. **Représentation matricielle d'une application linéaire.** Rappels sur les matrices de première année. Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs. Matrice d'une application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau et image d'une matrice sont définis comme ceux de l'application linéaire canoniquement associée. Propriétés. Matrices de passage et changements de base. Relation de similitude et application aux calculs de puissance.

Questions de cours.

- ✓ (Énoncé & Preuve) Définition d'une image directe, réciproque. Les images directes et réciproques d'espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels de départ et d'arrivée **(preuve uniquement pour l'image directe).** *Insister sur la méthodologie.*
- ✓ Formule de changement de base pour un vecteur. Application à la base canonique et à celle tournée d'un angle θ dans $\mathbf{R}^2$.
- ✓ Formule de changement de base pour les applications linéaires. Énoncé et démonstration (avec l'aide de la formule donnant la matrice d'une composée d'applications, et l'identité).

3. Suites & Séries Numériques

1. **Suites numériques.** Définition d'une suite, méthode informatique pour représenter les termes successifs d'une suite, monotonie et borne. Notion de limite en un élément de $\overline{\mathbf{R}}$, passages à la limite, propriétés de la limite. Théorèmes d'encadrement, de majoration, de minoration. Convergence des suites extraites paires/impaires (attention, pas de résul-

tats sur les autres sous-suites extraites au programme). Limite monotone. Rapide extension aux suites complexes. Suites remarquables : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux et récurrences générales à un pas du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour ces dernières, quelques exemples ont été vus, mais aucun résultat général n'est au programme : les étudiants doivent donc être capables de justifier les éventuelles propriétés utilisées.

❷ **Séries numériques.** Généralités : notion de somme partielle, convergence/divergence d'une série, reste d'une série convergente, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes et somme associée. Séries remarquables : géométrique, géométrique dérivée (convergence provisoirement admise, la valeur de la somme sera admise), série exponentielle (valeur de la somme admise), divergence de la série harmonique, convergence de la série $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$, convergence de $\left(\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ vers $\ln 2$: la preuve a été faite en TD. Condition nécessaire de convergence et divergence grossière. Lien suite/série *via* les séries téléscopiques. Séries à termes positifs, monotonie de la somme partielle dans ce cas, critère de comparaison des séries à termes positifs.

✣ *Questions de cours.*

- ✓ Suites adjacentes : définition, propriété de convergence (énoncé uniquement), application à la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ (exemple 5 **sans** la majoration du reste).
- ✓ Suites géométriques : définition, expression en fonction de n, convergence : énoncé. Expression de la somme des premiers termes (définition 14, théorème 15) : énoncé et démonstration.
- ✓ Condition nécessaire de convergence d'une série (proposition 7), divergence de la série $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ (exemple 14, 1.) : énoncé et preuve.
- ✓ Séries à termes positifs : monotonie de la somme partielle (preuve) et théorème de comparaison de séries à termes positifs (théorème 18) : énoncé et preuve.

Ma

Au programme de la semaine suivante : les suites & séries. Ensuite les probabilités générales & discrètes.

Révisions générales d'algèbre linéaire : espaces vectoriels et applications linéaires.

1. Espaces Vectoriels

Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $\mathrm{E} = \mathbf{K}^n$*, elles sont généralisées ici.*

❶ **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.

❷ **Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases.** Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices. Algorithme de la base incomplète et conséquences : théorème de la base extraite/incomplète.

❸ **Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.** Comparaison entre le nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice (résultat que nous avons admis). Définition de la dimension, toutes les bases ont même cardinal. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de $\dim \mathrm{E}$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Dimension d'un produit cartésien. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré (nous n'avons pas encore vu qu'il s'agit du rang de la matrice associée dans une base).

Questions de cours.

- ✓ (Énoncé & Preuve) L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.
- ✓ (Énoncé & Preuve) L'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre deux est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions deux fois dérivables. Famille **R**-génératrice de l'ensemble de ces solutions lorsque les coefficients sont constants.
- ✓ Présentation de l'algorithme de la base incomplète pour compléter une famille libre $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ en une base d'un espace vectoriel de dimension finie à l'aide d'une famille génératrice $(g_1, \dots, g_q)$.

Ne pas hésiter à proposer en plus large quantité des exercices spécifiques au programme de 2ème année, notamment les espaces vectoriels de fonctions, de suites, de polynômes.

2. Applications Linéaires

Sur ce chapitre pour cette semaine, en revanche, les exercices doivent rester simples (peu d'exercices traités pour le moment) ; par exemple des calculs d'images et de noyaux.

❶ **Généralités.** Notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Cas des formes linéaires, endomorphisme identique et homothéties. Détermination des applications **C** et **R**-linéaires de **C**, et des applications **K**-linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^r$. Exemples faisant intervenir des polynômes, fonctions, suites. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau. Isomorphismes, automorphismes (notation $\mathcal{GL}(\mathrm{E})$ pour l'ensemble des automorphismes sur E, un espace vectoriel), l'inverse d'une bijection linéaire est linéaire, inverse d'une composée. Équations linéaires du type $f(x) = y_0$ avec $(x, y_0) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ où E, F sont deux espaces vectoriels et f une application linéaire $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et structure de l'ensemble des solutions, mise en perspective avec le cas $\mathrm{E} = \mathcal{D}^{1/2}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux vues précédemment.

❷ **Cas particulier de la dimension finie.** Image de familles de vecteurs, caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire en fonction de l'image d'une base de l'espace de départ. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension. Équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité pour des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension. Application à l'existence d'un polynôme interpolateur. Rang.

❸ **Représentation matricielle d'une application linéaire.** Rappels sur les matrices de première année. Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs. Matrice d'une application linéaire. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau et image d'une matrice sont définis comme ceux de l'application linéaire canoniquement associée. Propriétés. Matrices de passage et changements de base. Relation de similitude et application aux calculs de puissance.

Questions de cours.

- ✓ (Énoncé & Preuve) Définition d'une image directe, réciproque. Les images directes et réciproques d'espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels de départ et d'arrivée **(preuve uniquement pour l'image directe).** *Insister sur la méthodologie.*
- ✓ Formule de changement de base pour un vecteur. Application à la base canonique et à celle tournée d'un angle θ dans $\mathbf{R}^2$.
- ✓ Formule de changement de base pour les applications linéaires. Énoncé et démonstration (avec l'aide de la formule donnant la matrice d'une composée d'applications, et l'identité).

Au programme de la semaine suivante : les suites numériques et le début des séries.

Au programme cette semaine : on reprend les espaces vectoriels ; et on y ajoute quelques éléments sur les applications linéaires.

1. Espaces Vectoriels

Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $E = \mathbf{K}^n$, elles sont généralisées ici.

❶ **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, des suites et des fonctions. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.

❷ **Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases.** Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices. Algorithme de la base incomplète et conséquences : théorème de la base extraite/incomplète.

❸ **Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.** Comparaison entre le nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice (résultat que nous avons admis). Définition de la dimension, toutes les bases ont même cardinal. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de $\dim E$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Dimension d'un produit cartésien. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré (nous n'avons pas encore vu qu'il s'agit du rang de la matrice associée dans une base).

✣ ***Questions de cours.***

- ✓ (Énoncé & Preuve) L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.
- ✓ (Énoncé & Preuve) L'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre deux est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions deux fois dérivables. Famille $\mathbf{R}$-génératrice de l'ensemble de ces solutions lorsque les coefficients sont constants.
- ✓ Présentation de l'algorithme de la base incomplète pour compléter une famille libre $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ en une base d'un espace vectoriel de dimension finie à l'aide d'une famille génératrice $(g_1, \dots, g_q)$.

Ne pas hésiter à proposer en plus large quantité des exercices spécifiques au programme de 2ème année, notamment les espaces vectoriels de fonctions, de suites, de polynômes.

2. Applications Linéaires

Sur ce chapitre pour cette semaine, en revanche, les exercices doivent rester simples (peu d'exercices traités pour le moment) ; par exemple des calculs d'images et de noyaux.

❶ **Généralités.** Notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Cas des formes linéaires, endomorphisme identique et homothéties. Détermination des applications $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$-linéaires de $\mathbf{C}$, et des applications $\mathbf{K}$-linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^r$. Exemples faisant intervenir des polynômes, fonctions, suites. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau. Isomorphismes, automorphismes (notation $\mathcal{GL}(E)$ pour l'ensemble des automorphismes sur E, un espace vectoriel), l'inverse d'une bijection linéaire est linéaire, inverse d'une composée. Équations linéaires du type $f(x) = y_0$ avec $(x, y_0) \in E \times F$ où E, F sont deux espaces vectoriels et f une application linéaire $E \to F$ et structure de l'ensemble des solutions, mise en perspective avec le cas $E = \mathcal{D}^{1/2}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux vues précédemment.

❷ **Cas particulier de la dimension finie.** Image de familles de vecteurs, caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire en fonction de l'image d'une base de l'espace de départ. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension. Équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité pour des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension.

✣ ***Questions de cours.***

- ✓ (Énoncé & Preuve) Définition d'une image directe, réciproque. Les images directes et réciproques d'espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels de départ et d'arrivée. *Insister sur la méthodologie.*

3. Algorithmique, TP2

❶ **Récursivité.** Notion de fonction récursive, exemples de construction de suites récurrentes de manière récursive.

❷ **Complexité & Terminaison.** Correction/terminaison d'un algorithme. Notion de complexité spatiale & temporelle. Exemples : exponentiation rapide et algorithme de Horner pour le calcul de $P(x)$ avec P un polynôme et $x \in \mathbf{R}$ présentés sous forme récursive. Comparaison des complexités temporelles avec celles des méthodes naïves.

❸ **Tris.** Révisions sur le tri par insertion, et le tri à bulles. Tri rapide ou *Quicksort* de manière récursive. Le tri fusion a été donné, mais abordé par très peu d'étudiants.

Questions de cours.

✓ python Algorithme de Horner, méthode récursive. Calcul de la complexité et comparaison avec la méthode naïve.

✓ python Fonction qui détermine si une liste est triée par ordre croissant ou non.

✓ python Algorithme de tri rapide ou *Quicksort*.

Au programme de la semaine suivante : les espaces vectoriels et les applications linéaires où l'on ajoutera leur écriture matricielle. Révisions d'algorithmique.

Au programme cette semaine : on reprend les fonctions de plusieurs variables, on ajoute les espaces vectoriels.

1. Fonctions de plusieurs variables

Beaucoup de notions ont été définies pour des fonctions de n variables. Merci de ne proposer cependant que des exercices pour des fonctions de $n = 2$ variables conformément au programme.

❶ Introduction ; définition, surface associée à une fonction de deux variables et lignes de niveaux.
python Méthode pour représenter une telle surface à l'aide de la bibliothèque `mplot3d`.

❷ Limites et continuité ; quelques rudiments de topologie pour définir correctement la notion de limite (norme euclidienne, boule ouverte, ensemble ouvert, adhérence d'une partie de $\mathbf{R}^n$).

> ⚠ **Attention**
>
> Aucun exercice purement topologique n'est un attendu du programme.

Limite en un point de $\mathbf{R}^n$, méthode pour nier l'existence d'une limite. Continuité : contre-exemple pour justifier que la continuité partielle n'entraîne pas la continuité globale.

❸ Dérivabilité directionnelle et partielle. Propriétés et gradient. Fonctions de classe C^1 et C^2. Formules de la chaîne pour les fonctions de deux variables. Formule de Taylor. Le caractère C^1 entraîne la continuité. Théorème de Scwharz. Condition nécessaire d'existence d'un extrema local/global, points critiques.

> ⚠ **Attention**
>
> La notion de différentiabilité n'est pas au programme de BCPST, la formule de Taylor-Young à l'ordre un est donc énoncée sous l'hypothèse plus forte C^1.

Questions de cours.

- ✓ (sans preuve) Formule de Taylor à l'ordre un pour les fonctions de deux variables de classe C^1, interprétation géométrique avec le plan tangent. Application à $(x, y) \longmapsto \sqrt{x^3 + y^3}$ pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1,02^3 + 2,07^3}$ sans calculatrice.
- ✓ (sans preuve) Formule de la chaîne pour la dérivation partielle en u et v d'expressions du type $f(x(u, v), y(u, v))$ avec x, y, f de classe C^1. Application au changement de variable polaire.

2. Espaces Vectoriels

Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $\mathrm{E} = \mathbf{K}^n$, elles sont généralisées ici.

❶ Structure d'espace vectoriel. Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, des suites et des fonctions. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.

❷ Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases. Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques.

> ⚠ **Attention**
>
> Nous n'avons pas encore vu la dimension pour des espaces vectoriels généraux, ni les théorèmes de la base incomplète/extraite. Les étudiants connaissent cependant la notion de dimension pour $\mathrm{E} = \mathbf{K}^n$.

Questions de cours.

- ✓ (Énoncé et preuve) L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.
- ✓ (Énoncé et preuve) L'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre deux est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions deux fois dérivables. Famille génératrice de l'ensemble de ces solutions lorsque les coefficients sont constants.

3. Algorithmique, TP2

❶ Récursivité : notion de fonction récursive, construction de suites récurrentes de manière récursive.

❷ Complexité & Terminaison. Correction/terminaison d'un algorithme. Notion de complexité spatiale & temporelle. Exemples : exponentiation rapide et algorithme de Horner pour le calcul de $\mathrm{P}(x)$ avec P un polynôme et $x \in \mathbf{R}$ présentés sous forme récursive. Comparaison des complexités temporelles avec celles des méthodes naïves.

❸ Tris : révisions sur le tri par insertion, et le tri à bulles. Tri rapide ou *Quicksort* de manière récursive. Le tri fusion a été donné, mais abordé par très peu d'étudiants.

Questions de cours.

- ✓ python Algorithme de Horner, méthode récursive. Calcul de la complexité et comparaison avec la méthode naïve.
- ✓ python Fonction qui détermine si une liste est triée par ordre croissant ou non.
- ✓ python Algorithme de tri rapide ou *Quicksort*.

Au programme de la semaine prochaine : les espaces vectoriels, les applications linéaires, et encore les tris.

Programme de colles # ❷ — Semaine du 24/09/2018 au 01/10/2018

Au programme cette semaine : on reprend le programme précédent et on y ajoute les fonctions de plusieurs variables. L'oral débutera par une question de cours prise au choix dans la liste ci-dessous.

1. Fonctions d'une variable réelle : continuité, dérivabilité, développements limités

❶ Généralités sur les fonctions : graphe, parité, périodicité, *etc.*

❷ Limite et continuité : définition « avec des ε », limite à droite/-gauche, caractérisation séquentielle, propriétés de la limite.

❸ Continuité : définition, version séquentielle, prolongements, théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, théorème de Heine (fonction continue sur un segment).

❹ Dérivation : définition, propriétés, dérivée à droite/gauche, extrema et point critique intérieur au domaine de définition. Rolle, accroissements finis.

❺ Développements limités : propriétés (somme, produit, composition), formule de Taylor-Young, développements usuels à connaître. Applications.

> **Attention**
>
> Les fonctions de trigonométrie hyperbolique ch et sh ne sont pas au programme de BCPST.

Questions de cours.

✓ Construction de la fonction Arctan, formule de Arctan' et de son développement limité (avec justification). Énoncé de la formule générale donnant la dérivée d'une bijection réciproque.

✓ python Fonction résolvant de manière approchée l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie où f est une fonction continue.

2. Équations différentielles

❶ Équations différentielles linéaires d'ordre un : forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (variation de la constante et second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t}\,(\mathrm{P}(t)\cos(\beta t) + \mathrm{Q}(t)\sin(\beta t))$$

nous avons vu la méthode avec des exponentielles complexes. Les étudiants sont cependant libres d'utiliser leurs résultats de première année aussi.

❷ Équations différentielles linéaires d'ordre deux : forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t}\,(\mathrm{P}(t)\cos(\beta t) + \mathrm{Q}(t)\sin(\beta t))$$

nous avons vu la méthode avec des exponentielles complexes. Les étudiants sont cependant libres d'utiliser leurs résultats de première année aussi.

> **Attention**
>
> la méthode de variation des constantes n'est pas au programme.

❸ Dynamique des populations.

❹ Méthode d'Euler : présentation de la méthode et premier exemple (approximation de l'exponentielle).

Questions de cours.

✓ Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en fonction de l'ensemble des solutions homogènes et d'une solution particulière (avec preuve). Forme de l'ensemble des solutions de l'homogène et recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est du type $t \mapsto \mathrm{P}(t)e^{mt}$ avec $\mathrm{P} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$ et $m \in \mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

✓ Présentation de la méthode d'Euler pour une équation différentielle du type $y'(t) = f(t, y(t))$ où $f : \mathrm{I} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, avec $\mathrm{I} = [0, \mathrm{R}]$, $\mathrm{R} > 0$ un segment. Application à une équation différentielle simple. *Nous n'avons pas encore pratiqué en TP, seulement le principe doit être connu pour le moment et pas son implémentation informatique.*

3. Fonctions de plusieurs variables

Beaucoup de notions ont été définies pour des fonctions de n variables. Merci de ne proposer cependant que des exercices pour des fonctions de $n = 2$ variables conformément au programme.

❶ Introduction ; définition, surface associée à une fonction de deux variables et lignes de niveaux.
python Méthode pour représenter une telle surface à l'aide de la bibliothèque `mplot3d`.

❷ Limites et continuité ; quelques rudiments de topologie pour définir correctement la notion de limite (norme euclidienne, boule ouverte, ensemble ouvert, adhérence d'une partie de $\mathbf{R}^n$).

> **Attention**
>
> Aucun exercice purement topologique n'est un attendu du programme.

Limite en un point de $\mathbf{R}^n$, méthode pour nier l'existence d'une limite. Continuité : contre-exemple pour justifier que la continuité partielle n'entraîne pas la continuité globale.

❸ Dérivabilité directionnelle et partielle. Propriétés et gradient. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$. Formules de la chaîne pour les fonctions de deux variables. Formule de Taylor. Le caractère $\mathcal{C}^1$ entraîne la continuité. Théorème de Scwharz. Condition nécessaire d'existence d'un extrema local/global, points critiques.

Attention

La notion de différentiabilité n'est pas au programme de BCPST, la formule de Taylor-Young à l'ordre un est donc énoncée sous l'hypothèse plus forte $\mathcal{C}^1$.

Questions de cours.

- ✓ Formule de Taylor à l'ordre un pour les fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$, interprétation géométrique avec le plan tangent. Application à $(x, y) \longmapsto \sqrt{x^3 + y^3}$ pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1,02^3 + 2,07^3}$ sans calculatrice.
- ✓ Formule de la chaîne pour la dérivation partielle en u et v d'expressions du type $f(x(u, v), y(u, v))$ avec x, y, f de classe $\mathcal{C}^1$. Application au changement de variable polaire.

4. Algorithmique

Questions de cours.

- ✓ python Fonction qui calcule les factorielles d'un entier. Fonction qui renvoie si une liste `L` contient l'élément `x`, ainsi que la première position de `x` dans cette liste, sans utiliser l'instruction `in`.

Au programme de la semaine prochaine : les espaces vectoriels et les tris en algorithmique.

Au programme cette semaine : des révisions d'analyse de première année. L'oral débutera par une question de cours prise au choix dans la liste ci-dessous.

1. Fonctions d'une variable réelle : continuité, dérivabilité, développements limités

➊ Généralités sur les fonctions : graphe, parité, périodicité, *etc.*

➋ Limite et continuité : définition « avec des ε », limite à droite/-gauche, caractérisation séquentielle, propriétés de la limite.

➌ Continuité : définition, version séquentielle, prolongements, théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, théorème de Heine (fonction continue sur un segment).

➍ Dérivation : définition, propriétés, dérivée à droite/gauche, extrema et point critique intérieur au domaine de définition. Rolle, accroissements finis.

➎ Développements limités : propriétés (somme, produit, composition), formule de Taylor-Young, développements usuels à connaître. Applications.

Attention

Les fonctions de trigonométrie hyperbolique ch et sh ne sont pas au programme de BCPST.

Questions de cours.

✓ Énoncé de la caractérisation séquentielle de la limite, et montrer que $x \longmapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

✓ Définition de la limite d'une fonction en un point a. Montrer que si une fonction f admet une limite en un point a dans son ensemble de définition, alors cette limite vaut nécessairement $f(a)$ (Proposition 2.2).

✓ Construction de la fonction Arctan, formule de Arctan' et de son développement limité (avec justification). Énoncé de la formule générale donnant la dérivée d'une bijection réciproque.

✓ python Fonction résolvant de manière approchée l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie où f est une fonction continue.

2. Équations différentielles

➊ Équations différentielles linéaires d'ordre un : forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (variation de la constante et second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t}\left(\mathrm{P}(t)\cos(\beta t) + \mathrm{Q}(t)\sin(\beta t)\right)$$

nous avons vu la méthode avec des exponentielles complexes. Les étudiants sont cependant libres d'utiliser leurs résultats de première année aussi.

➋ Équations différentielles linéaires d'ordre deux : forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t}\left(\mathrm{P}(t)\cos(\beta t) + \mathrm{Q}(t)\sin(\beta t)\right)$$

nous avons vu la méthode avec des exponentielles complexes. Les étudiants sont cependant libres d'utiliser leurs résultats de première année aussi.

Attention

la méthode de variation des constantes n'est pas au programme.

➌ Dynamique des populations.

➍ Méthode d'Euler : présentation de la méthode et premier exemple (approximation de l'exponentielle).

Questions de cours.

✓ Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en fonction de l'ensemble des solutions homogènes et d'une solution particulière (avec preuve). Forme de l'ensemble des solutions de l'homogène et recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est du type $t \mapsto \mathrm{P}(t)e^{mt}$ avec $\mathrm{P} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}]$ et $m \in \mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

✓ Présentation de la méthode d'Euler pour une équation différentielle du type $y'(t) = f(t, y(t))$ où $f : \mathrm{I} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, avec $\mathrm{I} = [0, \mathrm{R}]$, $\mathrm{R} > 0$ un segment. Application à une équation différentielle simple. *Nous n'avons pas encore pratiqué en TP, seulement le principe doit être connu pour le moment et pas son implémentation informatique.*

3. Info — Algorithmique.

Premier TP d'informatique de révisions.

Questions de cours.

✓ python Fonction qui calcule les factorielles d'un entier. Fonction qui renvoie si une liste `L` contient l'élément `x`, ainsi que la première position de `x` dans cette liste, sans utiliser l'instruction `in`.

Au programme de la semaine prochaine : on ajoutera les fonctions de plusieurs variables.