D.S. de Mathématiques # 3
Le samedi 24/11/2018. Durée : 3 heures 30.

Lycée Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

Les variables doivent être quantifiées, et les raisonnements avec les symboles logiques $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$ limités. Des points seront retirés dans le cas contraire.

Bon courage !

Problème 1 **Étude d'une série de terme général un produit dont un terme est téléscopique, transformation d'Abel.**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \quad \mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ \mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

□ **1—** On suppose, dans cette question, que pour tout $n \geq 1$, $\quad a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

■ **1.1.** vérifier que $\left(\sum a_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa somme.

■ **1.2.** Déterminer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$ la nature de la série $\left(\sum nx^{n-1}\right)_{n\geqslant 1}$.

■ **1.3.** Montrer que la série $\left(\sum b_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa somme.

□ **2—** On suppose, dans cette question, que $\quad a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$, $n \geq 2$, $\quad$ et $\quad a_1 = 0$.

■ **2.1.** Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.

■ **2.2.** Déterminer la nature de la série $\left(\sum a_n\right)_{n\geqslant 1}$.

■ **2.3.** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$.

■ **2.4.** Quelle est la nature de la série $\left(\sum b_n\right)_{n\geqslant 1}$? *On pourra d'abord chercher un équivalent de (b_n).*

□ **3—** *Transformation d'Abel* — on suppose dans cette question que la série $\left(\sum a_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

■ **3.1.** Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad na_{2n} \leq u_n$.

■ **3.2.** En déduire que : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

■ **3.3.** Démontrer alors que $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$. *On pourra considérer les sous-suites des termes pairs et impairs.*

■ **3.4.** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad \mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n - na_{n+1}$. *On pourra séparer en deux parties le terme B_n puis utiliser un changement de variable.* En déduire que la série $\left(\sum b_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

■ **3.5.** A-t-on $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

□ **4—** On suppose dans cette question que la série $\left(\sum b_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

■ **4.1. Cours –** rappeler le critère de comparaison des séries à termes positifs.

Jonathan HARTER

- **4.2.** Montrer que : $\forall m \in \mathbf{N}^*,\ m \leq n, \quad B_n \geq A_m - m a_{n+1}$.
- **4.3.** En déduire que $\left(\sum a_n\right)_{n \geqslant 1}$ converge.
- **4.4.** Peut-on en déduire encore que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

SOLUTION

□ **1—**

- **1.1.** La série proposée est géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$ et donc convergente. On a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

On en déduit que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2$. Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2.}$

- **1.2.**

✓ Si $x > 1$ alors $nx^{n-1} \to +\infty$ ce qui montre que la série ne converge pas pour $x > 1$.

✓ Si $x \in [0,1[$, alors par croissance comparée $n^3 x^{n-1} \to 0$, donc pour n assez grand, $nx^{n-1} \leqslant \frac{K}{n^2}$ avec $K \in \mathbf{R}^+$. Ainsi, puisque l'on compare des séries à termes positifs, $\left(\sum nx^{n-1}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Finalement, $\boxed{\left(\sum nx^{n-1}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge si et seulement si } x \in [0,1[.}$

- **1.3.** On a $b_n = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Comme $1/2 \in]-1,1[$, la question précédente montre que $\sum b_n$ converge. Le théorème du cours donnant la somme des séries dérivées géométriques donne :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-1/2)^2} = 2$$

□ **2—**

- **2.1.** $f \ : \ x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x > 1,\ f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{(x\ln(x))^2} \leq 0$$

f est donc décroissante sur $]1,+\infty[$ (on aurait aussi pu montrer que si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$ en utilisant la croissance de ln et la décroissance du passage à l'inverse sur $\mathbf{R}^{+*}$).

On en déduit immédiatement que $\boxed{(a_n)_{n\geq 2} \text{ est décroissante. Elle est de limite nulle}}$ par théorèmes d'opération.

- **2.2.** f étant décroissante, on peut utiliser une comparaion série-intégrale. On a

$$\forall k \geq 3,\ \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq a_k = f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

En sommant (et comme $a_1 = 0$) la relation de Chasles donne

$$\forall n \geq 2,\ a_2 + \int_3^{n+1} f(t)\,dt \leq A_n \leq a_2 + \int_2^n f(t)\,dt$$

Une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$ et on a donc

$$\forall n \geq 2,\ a_2 + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq A_n$$

La minorant étant de limite $+\infty$, il en est de même de A_n et $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

- **2.3.** $na_n = \frac{1}{\ln(n)}$ si $n \geq 2$. On a donc directement

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$$

- **2.4.** On a

$$b_n = \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}$$

On écrit que

$$\begin{aligned} (n+1)\ln(n+1) &= (n+1)\left(\ln(n) + \ln(1+1/n)\right) \\ &= (n+1)\ln(n) + (n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n\ln(n) + \ln(n) + o(\ln(n)) \end{aligned}$$

Ainsi, $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim \ln(n)$ et donc

$$b_n \sim \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1}$$

$\boxed{\sum(b_n) \text{ est ainsi une série divergente}}$ (positive et équivalente à une série divergente).

□ **3—**

- **3.1.** Dans la somme définissant u_n, il y a n termes. Par décroissance de (a_k), le plus petit d'entre eux est a_{2n}. On a donc $\boxed{na_{2n} \leq u_n.}$
- **3.2.** On a $u_n = \mathrm{A}_{2n} - \mathrm{A}_n$ et comme (A_n) converge (suite des sommes partielles de la série convergente $\sum(a_n)$) on en déduit que $u_n \to 0$.

L'encadrement $0 \leq na_{2n} \leq u_n$ prouve alors que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0.}$

- **3.3.** Posons $c_n = na_n$. On a $c_{2n} = 2(na_{2n}) \to 0$. De plus

$$0 \leq c_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = c_{2n} + a_{2n+1}$$

Comme $\sum(a_k)$ converge, $a_k \to 0$. Le majorant ci-dessus est de limite nulle et, par théorème d'encadrement, $c_{2n+1} \to 0$. Du résultat sur les extraites de rang pair et impair, on déduit que $c_n \to 0$, c'est à dire que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} na_n = 0.}$

- **3.4.** On revient aux sommes partielles.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)a_k \\
&= a_1 + \sum_{k=2}^{n} (k-(k-1))a_k - na_{n+1} \\
&= \mathrm{A}_n - na_{n+1}
\end{aligned}$$

Les trois termes du membre de droite admettant une limite finie quand $n \to +\infty$, (B_n) converge et donc $\boxed{\sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge.}}$

- **3.5.** Un passage à la limite dans l'identité précédente donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

□ **4—**

- **4.1.** Voir cours.
- **4.2.** Reprenons l'identité de la question précédente (on s'est donné $1 \leq m \leq n$)

$$\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n + na_{n+1} = \mathrm{A}_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k + na_{n+1}$$

Dans la somme, il y a $n-m$ termes tous plus grand que a_n et donc aussi que a_{n+1}. On en déduit que

$$\mathrm{B}_n \geq \mathrm{A}_m + (n-m)a_{n+1} + na_{n+1} = \mathrm{A}_m - ma_{n+1}$$

- **4.3.** Fixons $m \in \mathbf{N}^*$ et faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente (les limites existent) :

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \mathrm{A}_m$$

Ceci montre que (A_m) est une suite bornée. Comme elle croît (car les a_k sont ≥ 0), elle converge. Ainsi, $\boxed{\sum a_k \text{ converge.}}$

- **4.4.** On est alors ramenés à la partie précédente et on a donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.}$

. . . .

Problème 2 — Une première utilisation des séries en probabilités.

Partie 1 : Un calcul de somme.

Soit $x \in]0;1[$. Pour tout couple (n,k) de $\mathbf{N}^2$, on pose : $\quad \mathrm{S}_{n,k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{k} x^i.$

□ **1—**

- **1.1.** Calculer, pour tout n de $\mathbf{N}$, la somme $\mathrm{S}_{n,0}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{n,0}$.
- **1.2.** Montrer que : $\quad \forall (i,k) \in (\mathbf{N}^*)^2, \quad \binom{k+i}{k} - \binom{k+i-1}{k} = \binom{k+i-1}{k-1}.$
- **1.3.** En déduire : $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall k \in \mathbf{N}^*, \quad (1-x)\mathrm{S}_{n,k} = \mathrm{S}_{n,k-1} - \binom{k+n}{k} x^{n+1}.$

□ **2—** Soit $k \in \mathbf{N}$. Déterminer la limite de $n^k x^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

□ **3—** Montrer que considérant k fixé, $\displaystyle\binom{k+n}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$, puis en déduire la limite de $\displaystyle\binom{k+n}{k} x^{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

□ **4—** En raisonnant par récurrence sur k, montrer que : $\forall k \in \mathbf{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} S_{n,k} = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

□ **5—** En déduire que, pour tout k de $\mathbf{N}$, la série $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^n$ converge et que l'on a :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

□ **6—** Quel résultat retrouve-t-on pour $k=1$? Pour $k=2$?

Dans la suite vous pourrez utiliser les résultats précédents même s'ils n'ont pas été établis.

Partie 2 : Etude d'une expérience aléatoire.

On dispose d'une pièce de monnaie amenant pile avec une probabilité p ($p \in]0;1[$). On lance cette pièce un nombre aléatoire de fois, voire pas du tout. Les lancers sont supposés indépendants. À chaque pile obtenu, on gagne 1 euro. Pour tous n et k de $\mathbf{N}$, on définit les événements : L_n « On lance exactement n fois la pièce » et G_k « On gagne exactement k euros ». On pose $u_n = \mathbf{P}(L_n)$ (probabilité de l'évènement L_n). On fixe dans la suite $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé décrivant cette expérience aléatoire, où $\mathcal{T}$ est une tribu contenant au moins les évènements ci-dessus.

On admet que si la série $\left(\sum k\mathbf{P}(G_k)\right)_{k\geq 0}$ converge, alors la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbf{P}(G_k)$ représente le gain moyen obtenu.

□ **7—** Justifier que la famille $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un système complet d'évenements. Qu'en déduire pour la série $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ et la somme de cette série ?

□ **8—** Rappeler l'énoncé de la formule des probabilités totales. On posera notamment un cadre complet.

□ **9—**

- **9.1.** Calculer pour tout $(k,n) \in \mathbf{N}^2$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(G_k|L_n)$. *On distinguera les cas $k > n$ et $k \leq n$.*
- **9.2.** En déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$, que $\mathbf{P}(G_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} u_n$. On justifiera soigneusement cette relation qui pourra être utilisée librement dans la suite du problème.

□ **10—** Soit $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$. Dans cette question, on suppose que, pour tout n de $\mathbf{N}$, $u_n = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

- **10.1.** Vérifier que : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.
- **10.2.** Montrer que, pout tout entier naturel k, $\mathbf{P}(G_k) = \dfrac{e^{-\lambda}p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n (1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$.
- **10.3.** En déduire que : $\mathbf{P}(G_k) = e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}$.
- **10.4.** Justifier la convergence de la série $\left(\sum \mathbf{P}(G_k)\right)_{k\geq 0}$ et calculer sa somme. Qu'en déduit-on pour la famille $(G_k)_{k\in\mathbf{N}}$?
- **10.5.** Justifier la convergence de la série $\left(\sum k\mathbf{P}(G_k)\right)_{k\geq 0}$ et calculer le gain moyen.

□ **11—** Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}^*, u_n = q^{n-1}p$ avec $q = 1-p$.

- **11.1.** Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. Calculer alors la probabilité u_0 de ne pas tirer la pièce.
- **11.2.** Calculer $P(G_0)$.
- **11.3.** En utilisant la partie 1, montrer que : pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(G_k) = \dfrac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$.
- **11.4.** Justifier la convergence de la série $\left(\sum k\mathbf{P}(G_k)\right)_{k\geq 0}$ et calculer le gain moyen.

SOLUTION de l'Exercice 0.

Partie 1.

□ **1—**

- **1.1.** Soit $n \in \mathbf{N}$, alors $S_{n,0} = \sum_{i=0}^{n} \binom{0+i}{0} x^i = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ d'après la formule de sommation de termes géométriques. Faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient ensuite :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_{n,0} = \frac{1}{1-x}}$$

puisque $x \in]0\,;1[$.

■ **1.2.** C'est une conséquence directe de la formule de Pascal qui nous dit que pour tout entier K, N on a : $\binom{N+1}{K+1} = \binom{N}{K} + \binom{N}{K}$. On fait ensuite $N = k + i - 1$ et $K = k - 1$.

■ **1.3.** Soient $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}^\star$. Alors

$$(1-x)S_n, k = (1-x)\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}x^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}x^i - \sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}x^{i+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}x^i - \sum_{i=1}^{n+1}\binom{k+i-1}{k}x^i$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\binom{k+i}{k} - \binom{k+i-1}{k}\right)x^i + 1 - \binom{k+n}{k}x^{n+1}\& = \boxed{\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i-1}{k-1}x^i - \binom{k+n}{k}x^{n+1}}.$$

□ **2—** Il s'agit ici d'utiliser proprement les croissances comparées : $n^k x^n = e^{k\ln n + n\ln x} = e^{n\ln x\left(k\frac{\ln n}{n\ln x}+1\right)}$, puisque $\ln x < 0$ le dernier terme converge vers zéro lorsque $n \longrightarrow \infty$. D'où : $\boxed{\lim_{n\to\infty} n^k x^n = 0}$.

□ **3—** On utilise la définition d'un coefficient binomial en terme de factoriels. On a :

$$\binom{k+n}{k} = \frac{(k+n)!}{k!n!} = \frac{(k+n)(k+n-1)\cdots n}{k!}\ \boxed{\sim_{n\to\infty}\frac{n^k}{k!}},$$

puisque sous cette forme il apparaît un produit fini de k (indépendant de n) termes au numérateur, l'équivalent est donc donné par le produit de chaque équivalent. Ainsi $\binom{k+n}{k}x^{n+1} \sim_{n\to\infty} \frac{n^k x^n x}{k!}$ et ce dernier terme tend vers zéro d'après une question précédente.

□ **4—** ■ ***Initialisation.*** La propriété a déjà été initialisée dans la première question.

■ ***Hérédité.*** Supposons là vraie au rang $k-1$, alors en utilisant 1.2 on a que $(1-x)S_{n,k}$ s'exprime comme différence deux termes convergeant ($S_{n,k-1}$ par hypothèse de récurrence, le second d'après la question précédente), on peut donc passer à la limite :

$$\lim_{n\to\infty}(1-x)S_{n,k} = \lim_{n\to\infty}S_{n,k-1} - \lim_{n\to\infty}\binom{k+n}{k}x^{n+1} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} - 0.$$

Comme $x \neq 1$, nous obtenons le résultat en divisant par $(1-x)$.

□ **5—** Nous avons donc que $\lim_{n\to\infty} S_{n,k} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i}{k}x^i$ existe. En particulier $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$ après changement $n = k+i$, donc également $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^n$ et

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} = \lim_{n\to\infty}S_{n,k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

d'où la formule en multipliant par x^k.

□ **6—** Pour $k=1$ et $k=2$ on retrouve la formule donnant la somme d'une série géométrique dérivée une fois et deux fois.

Partie 2.

□ **7—** Évidement : lance exactement k fois une pièce (avec k entier aléatoire) et donc pas j fois pour $j \neq k$. La famille (L_n) est donc un système complet d'évènements. On en déduit que $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est une série convergente de somme $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

□ **8—** Voir cours.

□ **9—**

■ **9.1.** $\mathbf{P}(G_k|L_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{sinon} \end{cases}$ puisque les lancers se font de manière indépendante.

■ **9.2.** D'après la formule de probabilités totales, on a : $\mathbf{P}(G_k) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(G_k|L_n)\,\mathbf{P}(L_n) = \boxed{\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}u_n}$.

□ **10—**

■ **10.1.** On calcule : $\sum_{n=0}^{\infty}u_n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda}\ \boxed{=1}$.

■ **10.2.** Remplacer, sortir les termes qui ne dépendent pas de n et simplifier les factoriels.

■ **10.3.** Il suffit de reconnaître une série exponentielle, pour tout entier k on fait le changement $m = n - k$ dans la somme :

$$\mathbf{P}(G_k) = \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+k}(1-p)^m}{m!} = \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\lambda^k e^{\lambda(1-p)} = \boxed{e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}}.$$

■ **10.4.** Puisque $\left(\sum \mathbf{P}(G_K)\right)_{k\geqslant 0}$ est elle-même encore une série exponentielle, on obtient la convergence et la valeur de la somme :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(G_k) = e^{-\lambda p}e^{\lambda p} = 1}.$$

La famille (G_k) est donc un système quasi-complet d'évènements.

■ **10.5.** Pour tout entier $k \in \mathbf{N}^\star$, nous avons $k\mathbf{P}(G_k) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda p}\lambda p\frac{(\lambda p)^{k-1}}{(k-1)!}$, donc comme $\left(\sum\frac{(\lambda p)^{k-1}}{(k-1)!}\right)_{k\geqslant 1}$ converge (série exponentielle), nous obtenons la convergence de $\left(\sum k\mathbf{P}(G_k)\right)_{k\geqslant 0}$. De plus, sa somme est égale à :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{P}(G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(G_k) = e^{-\lambda p}\lambda p e^{\lambda p} = \boxed{\lambda p}.$$

Cette dernière quantité correspond donc au grain moyen.

□ **11—**

■ **11.1.** On suppose que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^{\star}$, $u_n = q^{n-1}p$ avec $q = 1-p$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p = p\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{p}{1-q} = \boxed{1}$. La probabilité u_0 vaut donc $1-1=0$ puisque $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1$ (la famille (L_k) est un système complet d'évènements).

■ **11.2.** $\mathbf{P}(G_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n pq^{n-1} = \frac{p}{q}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \boxed{\frac{p}{q}\frac{1}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}}$.

■ **11.3.** On calcule ensuite $\mathbf{P}(G_k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}^{\star}$. On a :

$$\mathbf{P}(G_k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}pq^{n-1} = \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}q^{2n}.$$

Puisque $q \in]0,1[$, le résultat établi dans la première partie nous donne :

$$\mathbf{P}(G_k) = \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}}\frac{q^{2k}}{(1-q^2)^{k+1}} = \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}}\frac{q^{2k}}{(1-q)^{k+1}(1+q)^{k+1}} = \boxed{\frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}}.$$

■ **11.4.** La série est quasiment une série géométrique dérivée : $k\mathbf{P}(G_k) = k\frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} = \frac{1}{1+q^2}k\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$, donc comme $\left|\frac{q}{1+q}\right| < 1$ la série converge et vers :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{P}(G_k) = \frac{1}{1+q^2}\frac{1}{1-\left(\frac{q}{1+q}\right)^2} \quad \boxed{=1}.$$

Le nombre 1 correspond donc au grain moyen.

Problème 3 Endomorphisme entre espaces de fonctions donné sous forme d'une somme de série.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $e_n : x \in \mathbf{R}^+ \longmapsto x^n e^{-x}$. Soient $N \in \mathbf{N}^*$ et E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ défini par

$$E = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_N).$$

□ **1—** Montrer que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_N)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

□ **2—** Pour tout élément g de E, on note $\Delta(g) = g'$.

■ **2.1.** Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.

■ **2.2.** Écrire la matrice A de Δ dans la base $\mathcal{B}$. L'endomorphisme Δ est-il un automorphisme de E ?

□ **3—** Soient $k \in [\![0\,;\,N]\!]$ et $x \geq 0$. Montrer que la série $\left(\sum w_n\right)_n = \left(\sum e_k(x+n)\right)_n$ est convergente.

□ **4—**

■ **4.1.** Pour tout entier naturel k, on considère une suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\left(\sum u_{n,k}\right)_{n\geqslant 0}$ converge. Donner la propriété du cours qui justifiant pour tout $N \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} u_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}\right)$$

On pour commencer par écrire l'égalité pour $N = 2$.

■ **4.2.** Soit $f \in E$. Démontrer que la série $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ où $u_n = f(x+n)$ est convergente pour tout $x \geq 0$. On note alors

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+x).$$

■ **4.3.** Justifier que la série $\left(\sum n^j e^{-n}\right)_{n\geqslant 0}$ pour tout $j \in \mathbf{N}$ est convergente. On note alors $A_j = \sum_{n=0}^{+\infty} n^j e^{-n}$.

■ **4.4.** Exprimer $F(x)$ en fonction des A_j pour tout $x \geq 0$.

■ **4.5.** En déduire que $F \in E$ et que l'application $\Phi : f \mapsto F$ ainsi définie est un endomorphisme de E.

■ **4.6.** Écrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des A_j.

➥ **SOLUTION**

□ **1—** Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Supposons pour cela que $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e_k = 0$ avec $\alpha_k \in \mathbf{R}$ pour tout k. On a alors

$$\forall x \geq 0,\ 0 = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k = e^{-x}Q(x)$$

e^{-x} étant non nul, Q est une fonction polynomiale nulle sur $\mathbf{R}^+$ et donc nulle (puisque Q possède une infinité de racines) ce qui entraîne la nullité des α_i. La famille $\mathcal{B}$ est libre et engendre E (par définition) et c'est donc $\boxed{\text{une base de E}}$. La dimension d'un espace étant le cardinal de l'une de ses bases, on a $\boxed{\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{N}+1.}$

□ **2—**

■ **2.1.** La linéarité de Δ est immédiate (linéarité de la dérivation). En outre

$$\Delta(e_0) = -e_0 \quad \text{et} \quad \forall j \in [|0,\mathrm{N}|],\ \Delta(e_j) = je_{j-1} - e_j$$

Les éléments d'une base de E étant envoyés dans E, Δ est finalement un endomorphisme de E.

■ **2.2.** Les calculs précédents montrent que $\mathrm{A} = \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}}{\mathcal{M}\mathrm{at}}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathrm{N} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice étant inversible (triangulaire à coefficients diagonaux non nuls), $\boxed{\Delta \in \mathcal{GL}(\mathrm{E}).}$

□ **3—** On a $w_n = (x+n)^k e^{-(x+n)} \sim e^{-x} n^k e^{-n} = o(1/n^2)$ par croissances comparées. Ainsi, $\boxed{\sum(w_n) \text{ est absolument convergente}}$ (et donc convergente) puisque pour n assez grand, $|w_n| \leqslant \mathrm{K}/n^2$ où K est une constante positive.

□ **4—**

■ **4.1.** Une somme (finie) de séries convergentes est convergente et le passage à la somme est linéaire dans l'espace des suites de série associée convergente.

■ **4.2.** Comme $f \in \mathrm{E}$, il existe des scalaires α_k tels que $f = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \alpha_k e_k$. $f(n+x)$ apparaît alors comme la somme des termes généraux de séries convergentes. La question précédente montre que $\boxed{\sum f(n+x) \text{ converge}}$ et que

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \left(\alpha_k \sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) \right) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \left(\alpha_k e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} \right)$$

■ **4.3.** $n^j e^{-n} = o(1/n^2)$ (par croissances comparées) et c'est le terme général d'une série absolument convergente puisque pour n assez grand, $\left| n^j e^{-n} \right| \leqslant \dfrac{\mathrm{K}}{n^2}$ avedc K une constante positive.

■ **4.4.** k étant fixé, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n} \right)$$

On peut là encore intervertir (car une somme est finie) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} = \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k}{j} x^{k-j} \mathrm{A}_j \right)$$

On en déduit (en gardant les notations de la question précédente) $\boxed{\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k e^{-x} \binom{k}{j} x^{k-j} \mathrm{A}_j.}$

■ **4.5.** On veut exprimer F à l'aide des e_i. On a

$$\mathrm{F} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k \binom{k}{j} \mathrm{A}_j e_{k-j}$$

Comme $0 \leq k-j \leq \mathrm{N}$, on a $\mathrm{F} \in \mathrm{E}$ (combinaison linéaire de $e_0, \dots, e_{\mathrm{N}}$). Ainsi Φ va de E dans E. Sa linéarité est immédiate ($\Phi(f_1 + \lambda f_2) = \Phi(f_1) + \lambda\Phi(f_2)$) et donc $\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}).}$

■ **4.6.** On applique ce qui précède avec $\mathrm{F} = e_i$ (tous les α_k nuls sauf $\alpha_i = 1$) :

$$\Phi(e_i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \mathrm{A}_j e_{i-j}$$

On obtient donc pour Φ dans la base $\mathcal{B}$ une matrice triangulaire comme ci-dessous

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0}\mathrm{A}_0 & \binom{1}{1}\mathrm{A}_1 & \binom{2}{2}\mathrm{A}_2 & \dots & \binom{\mathrm{N}}{\mathrm{N}}\mathrm{A}_{\mathrm{N}} \\ 0 & \binom{1}{0}\mathrm{A}_0 & \binom{2}{1}\mathrm{A}_1 & \dots & \binom{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}\mathrm{A}_{\mathrm{N}-1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{0}\mathrm{A}_0 & \dots & \binom{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-2}\mathrm{A}_{\mathrm{N}-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{\mathrm{N}}{0}\mathrm{A}_0 \end{pmatrix}.$$

. . . .