D.M. de Mathématiques # 7
à rendre le Mardi 15 Janvier 2019

Lycée Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
Le devoir peut être fait à deux, les deux écritures doivent ***impérativement*** *apparaître sur la copie et en parts égales.*
On rappelle qu'il vaut mieux, à titre exceptionnel, ne pas rendre un devoir maison plutôt que de recopier une correction trouvée sur internet.

Problème 1 — D'après concours G2E

Partie 1.

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ de matrices respectives J, K dans $\mathcal{B}$ données par :

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle *vecteur propre de f (resp. g)* tout vecteur $v \in \mathbf{R}^4 \setminus \{0_{\mathbf{R}^4}\}$ pour lequel il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ vérifiant :

$$f(u) = \lambda u, \quad (\textit{resp.} \quad g(v) = \lambda v).$$

Le réel λ est appelé *valeur propre* pour f (*resp.* g). Ainsi, $\lambda \in \mathbf{R}$ est valeur propre pour un endomorphisme s'il existe un vecteur propre non nul associé.

□ **1**— Les endomorphismes f et g commutent-ils ?

□ **2**— Montrer que si v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors soit $g(v)$ est nul, soit $g(v)$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

□ **3**— Montrer que le vecteur $v_1 = (1,1,1,1)$ est un vecteur propre commun à f et g. Préciser pour chaque endomorphisme la valeur propre associée.

□ **4**— Déterminer $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

On considère dans la suite les vecteurs : $\quad v_1 = (1,1,1,1), \quad v_2 = (1,-1,1,-1), \quad v_3 = (1,0,-1,0), \quad v_4 = (0,1,0,-1)$.

□ **5**— Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbf{R}^4$, et formée de vecteurs propres communs à f et g. Écrire $\mathrm{P} := \mathrm{P}^{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

□ **6**— Exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ en fonction de $\mathcal{B}'$. Qu'en déduit-on sur P ?

□ **7**— En déduire les matrices de f et f dans la base $\mathcal{B}'$, notées J' et K', ainsi que les relations entre J, J' et K, K'.

Partie 2.

On considère le sous-ensemble E de l'ensemble des matrices réelles carrées de taille 4 défini par :

$$\mathrm{E} = \left\{ \mathrm{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}, \ (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

□ **8**— Exprimer $\mathrm{M}(a,b)$ en fonction de J et K.

□ **9**— Montrer que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

□ **10**— Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, il existe une base de $\mathbf{R}^4$ formée de vecteurs propres de $\mathrm{M}(a,b)$ indépendants de a et b.

□ **11**— En déduire une matrice $\mathrm{D}(a,b)$ diagonale semblable à $\mathrm{M}(a,b)$. Écrire une relation entre $\mathrm{M}(a,b)$ et $\mathrm{D}(a,b)$.

□ **12**— Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathrm{M}(a,b)^n = \mathrm{M}(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n)$.

Partie 3.

On considère le damier suivant :

B_2	N_1	B_3
N_4	B_1	N_2
B_4	N_3	B_5

Un pion se déplace avec équiprobabilité sur ce damier de la case où il se trouve vers une une des cases qui possède avec cette case un côté commun.
Ainsi, si le pion est en N_2, il peut se déplacer vers B_1, B_3 ou B_5, avec des probabilités égales. On suppose qu'au départ, le pion est sur une case blanche.

□ **13**— Où peut se trouver le pion après un nombre pair de déplacements ? Après un nombre impair de déplacements ?

Posons maintenant pour $n \in \mathbf{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [\![1 \,;\, 5]\!]$, $p_{k,n}$ est la probabilité que pour le pion soit sur la case B_k, après le $2n$-ième déplacement si $n \neq 0$ et $p_{k,0}$ la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k au départ. Nous noterons $B_{k,n}$ l'évènement « le pion est sur la case B_k après le $2n$-ième déplacement ».

Posons maintenant pour $n \in \mathbf{N}$, $W_n = \begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [\![1 \,;\, 4]\!]$, $q_{k,n}$ est la probabilité que pour le pion soit sur la case N_k, après le $(2n-1)$-ième déplacement. Nous noterons $N_{k,n}$ l'évènement « le pion est sur la case N_k après le $(2n-1)$-ième déplacement ».

□ **14**— Exprimer pour tout entier n non nul, $(p_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant 5}$ en fonction de $(q_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant 4}$, puis $(q_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant 4}$ en fonction de $(p_{k,n-1})_{1\leqslant k\leqslant 5}$. En déduire deux matrices A et B telles que : $A \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbf{R}), B \in \mathcal{M}_{5,4}(\mathbf{R})$ et : $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad W_n = AV_{n-1}, V_n = BW_n$.

□ **15**— Calculer AB et montrer que $AB \in E$. *On pourra admettre dans la suite que* $AB = M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$.

□ **16**— Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad (AB)^n = M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\times 3^n}\right)$.

□ **17**— Exprimer de façon simple, pour tout entier n nul, $(BA)^n$ en fonction de A, B et d'une puissance de AB. Calculer alors $(BA)^n$.

□ **18**— Déterminer pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^\star$, une relation entre V_0 et V_n.

□ **19**— Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Quelle est la probabilité que le pion soit sur la case B_1 après le $2n$-ième déplacement ? Que remarque-t-on ?

Hypothèse d'évolution markovienne — Nous admettrons que le résultat du n-ième déplacement ne dépend que de la position du pion juste avant ce déplacement et non pas des autres positions précédentes. On a donc, en particulier :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \forall k \in [\![1 \,;\, 4]\!], \quad \mathbf{P}(B_{1,n+1} | N_{k,n+1} \cap B_{1,n}) = \mathbf{P}(B_{1,n+1} | N_{k,n+1}).$$

□ **20**— Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, les évènements $B_{1,n}$ et $B_{1,n+1}$ sont indépendants. Nous admettrons, plus généralement, sous l'hypothèse formulée ci-dessus, que la famille d'évènements $(B_{1,n})_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants et nous considèrerons dans les questions qui suivent que la position de départ n'est pas obtenue à partir d'un déplacement du pion.

□ **21**— Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On effectue $2n$ déplacements du pion. Soit X la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de fois où le pion a été déplacé sur la case B_1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

python Proposer un programme python `simuX` permettant de simuler une réalisation de X. Retrouver, par simulation, les valeurs de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$.

□ **22**— On effectue des déplacements du pion jusqu'à ce qu'il soit mené en B_1. Soit la variable Y, à valeurs dans $\mathbf{N}^\star$ égale au nombre de déplacements nécessaires pour que le pion atteigne la case B_1 pour la première fois. Déterminer la loi de Y, puis son espérance et sa variance.

python Proposer un programme python `simuY` permettant de simuler une réalisation de Y. Retrouver, par simulation, les valeurs de $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{Var}(Y)$.