D.M. de Mathématiques # 5
à rendre le Jeudi 15 Novembre 2018

Lycée Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.

*Le devoir peut être fait à deux, les deux écritures doivent **impérativement** apparaître sur la copie et en parts égales.*

On rappelle qu'il vaut mieux, à titre exceptionnel, ne pas rendre un devoir maison plutôt que de recopier une correction trouvée sur internet.

SOLUTION ....

PARTIE 1 : Intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$.

□ **1—**

- ✓ $t \mapsto \cos(t)$ est continue sur $\mathbf{R}$,
- ✓ si $n \in \mathbf{N}$, $X \mapsto X^n$ est continue sur $\mathbf{R}$,
- ✓ par composée, la fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ est continue sur $\mathbf{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[0;\pi/2]$.

Le théorème d'existence d'une primitive garantit alors que l'intégrale I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$. De plus, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \big[t\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$. D'autre part $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = \big[\sin(t)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$.

□ **2—**

■ **2.1.** Pour étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on s'intéresse au signe de la quantité $I_{n+1} - I_n$, pour $n \in \mathbf{N}$ quelconque :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(\cos(t) - 1)\,dt$$

Or, pour tout $t \in [0;\pi/2]$, $\cos(t) \geq 0$ donc $\cos^n(t) \geq 0$ (car la fonction $X \mapsto X^n$ est croissante sur $\mathbf{R}$). De plus, pour tout $t \in [0;\pi/2]$, $\cos(t) \leq 1$ donc $\cos(t) - 1 \leq 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $I_{n+1} - I_n \leq 0$ c'est-à-dire que $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est décroissante.}}$

■ **2.2.** Pour tout $t \in [0;\pi/2]$, $\cos^n(t) \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$. Comme $I_n \geq 0$, si $I_n = 0$ alors nécessairement la fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ est nulle sur $[0;\pi/2]$, ce qui n'est pas le cas. Donc on peut en déduire que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ I_n \neq 0.}$

■ **2.3.** La suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite finie ℓ.

□ **3—**

■ **3.1.** On pose

- ✓ $v(t) = \sin(t)$, donc $v'(t) = \cos(t)$,
- ✓ $u'(t) = \cos^n(t)\sin(t)$, avec $u(t) = -\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}$,
- ✓ les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,dt &= \Big[-\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\cos(t)\,dt \\ &= \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,dt = \frac{1}{n+1}I_{n+2}.\end{aligned}$$

(*Le crochet vaut* 0 *car* $\cos(\pi/2) = 0$ *et* $\sin(0) = 0$). D'où $\boxed{I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,dt.}$

■ **3.2.** Pour tout $t \in [0;\pi/2]$, $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ donc

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(1-\cos^2(t))\,dt \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,dt\right) = (n+1)(I_n - I_{n+2})\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{myb\ell ue}\ I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \iff (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

□ **4—**

■ **4.1.** La suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. Comme $I_n > 0$, on peut diviser cette inégalité par I_n et on obtient

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Or d'après la question 3.2., $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \iff I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ donc en remplaçant I_{n+2} par cette expression on a

$$\boxed{\frac{n+1}{n+2} = \frac{\frac{n+1}{n+2}I_n}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.}$$

■ **4.2.** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes et par passage à la limite dans l'inégalité de la question (a), la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

□ **5—**

■ **5.1.** On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $(n+1)\,I_n\,I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

<u>Initialisation</u> : $(0+1)I_0I_1 = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$ donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité</u> : Supposons l'égalité vraie pour un $n \in \mathbf{N}$ fixé.

Calculons $(n+2)\,I_{n+1}\,I_{n+2}$: d'après la question 3.(b), $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ donc

$$(n+2)\,I_{n+1}\,I_{n+2} = (n+1)\,I_{n+1}\,I_n = \frac{\pi}{2}$$

par hypothèse de récurrence. Ainsi, l'égalité est vérifiée au rang $n+1$.

<u>Conclusion</u> : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $(n+1)\,I_n\,I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

■ **5.2.** On pose $J_n = nI_n^2$.

❶ D'après la question 5.1., $I_n = \frac{1}{n+1}\frac{1}{I_{n+1}}\frac{\pi}{2}$ donc en multipliant cette égalité par $n\,I_n$, on obtient que $J_n = \frac{n}{n+1}\frac{I_n}{I_{n+1}}\frac{\pi}{2}$.

❷ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ d'après la question 4.(2) donc par passage à la limite dans l'expression de la question précédente, la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

■ **5.3.** Comme $I_n \geq 0$, $\sqrt{J_n} = \sqrt{nI_n^2} = \sqrt{n}I_n$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{X} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc par composée de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{J_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

■ **5.4.** On en déduit que $\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$

PARTIE 2 : Étude de la fonction $x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Soit la fonction donnée par

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x e^{-t^2}\,dt \end{array}$$

□ **6—** $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,x]$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ donc F est bien définie sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $\mathbf{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = e^{-x^2}$.

□ **7—** Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = e^{-x^2} > 0$, F est croissante sur $\mathbf{R}$.

□ **8—** On pose $u = -t \iff t = -u$. On a alors que $dut = -du$. De plus, si $t = 0$, alors $u = 0$ et si $t = x$, alors $u = -x$.

- La fonction $u \mapsto -u$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
- La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

D'après la formule de changement de variable, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dut = \int_0^{-x} e^{-(-u)^2}(-du) = -\int_0^{-x} e^{-u^2}\,du = -F(-x).$$

On en déduit que la fonction F est impaire.

□ **9—** Soit $x \in [1,+\infty[$, pour tout $t \in [1,x]$, on a

$$t \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq t \Rightarrow -t^2 \leq -t \Rightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t}$$

car la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbf{R}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient alors que

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = -e^{-x} + e^{-1}.$$

Or, $-e^{-x} + e^{-1} \leq e^{-1}$ car $-e^{-x} < 0$ donc pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\boxed{\int_1^x e^{-t^2} dt \leq e^{-1}.}$

□ **10—** Soit $x \in [1, +\infty[$, d'après la relation de Chasles,

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + e^{-1},$$

en utilisant la majoration de la question 4.

□ **11—** La quantité $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ prend une valeur réelle donnée.

En notant $\mathrm{M} = \int_0^1 e^{-t^2} dt + e^{-1}$, on a démontré à la question précédente que pour tout $x \geq 1$, $\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{M}$, ce qui garantit que F est majorée sur $[1, +\infty[$. Remarquons que si $x \geq 0$, $\mathrm{F}(x) \geq 0$ par positivité de l'intégrale (car la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive sur $\mathbf{R}$ donc sur $[0, x]$). Par imparité, on obtient alors que si $x \leq 0$, alors $\mathrm{F}(x) \leq 0$: ceci garantit que F est majorée (par 0) sur $]-\infty, 0]$. Comme toute fonction continue sur un segment est bornée, F est finalement majorée sur $[0, 1]$. E $\boxed{\text{n résumé, F est bien majorée sur } \mathbf{R}.}$

□ **12—** F est une fonction croissante majorée sur $\mathbf{R}$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{F admet une limite finie en } +\infty.}$

PARTIE 3 : Encadrement de $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$

□ **13—**

■ **13.1.** Posons $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$. g est définie sur $]-1, +\infty[$ (il faut que $1 + x > 0$), et dérivable sur ce même ensemble. De plus, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$. Ainsi, on peut dresser le tableau de variation suivant pour la fonction g :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	0	↘	

car $g(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln(1) = 0$. D'après le tableau de variation de la fonction g, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g(x) \leq 0 \iff \ln(1+x) - x \leq 0 \iff \ln(1+x) \leq x$. Soit $y > -n \iff \frac{y}{n} > -1$ (car $n > 0$). En posant $x = \frac{y}{n}$ dans l'inégalité précédemment démontrée, on obtient que

$$\ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) \leq \frac{y}{n} \Rightarrow n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) \leq y \Rightarrow \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)} \leq e^y,$$

car la fonction $\mathrm{X} \mapsto e^{\mathrm{X}}$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

■ **13.2.** Soit $t \in [0, \sqrt{n}[$. Alors $t^2 \in [0, n[$ et $-t^2 \in]-n, 0]$. Posons $y_1 = -t^2$. $y_1 > -n$ donc d'après la question précédente,

$$\left(1 + \frac{y_1}{n}\right)^n \leq e^{y_1} \iff \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}.$$

Posons maintenant $y_2 = t^2$. $y_2 \geq 0 > -n$ donc d'après la question précédente,

$$\left(1 + \frac{y_2}{n}\right)^n \leq e^{y_2} \iff \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{t^2} \iff \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \geq \frac{1}{e^{t^2}} = e^{-t^2}.$$

D'où finalement, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$..

La fonction $\mathrm{X} \mapsto \sqrt{\mathrm{X}} = \mathrm{X}^{\frac{1}{2}}$ étant croissante sur $\mathbf{R}_+$,

$$\left(\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(e^{-t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\iff \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}.$$

■ **13.3.** Par croissance de l'intégrale entre 0 et $\sqrt{n}$, on en déduit que $\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt.}$

□ **14—** On pose $t = \sqrt{n}\sin(u)$. On a alors que $\mathrm{d}ut = \sqrt{n}\cos(u)\,\mathrm{d}u$. De plus, pour que $t = 0$, on peut choisir $u = 0$ et pour que $t = \sqrt{n}$, on peut choisir $u = \frac{\pi}{2}$.

- La fonction $u \mapsto \sqrt{n}\sin(u)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- La fonction $t \mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ est continue $[0, \sqrt{n}[$.

D'après la formule de changement de variable,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{(\sqrt{n}\sin(u))^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{n}\cos(u)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(u)\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{n}\cos(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2(u)\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{n}\cos(u)du \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\cos(u)du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(u)du = \sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n+1}.\end{aligned}$$

□ **15—**

■ **15.1.** Soit $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. $1 + \tan^2(u) = 1 + \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} = \frac{\cos^2(u) + \sin^2(u)}{\cos^2(u)} = \frac{1}{\cos^2(u)}$.

■ **15.2.** On pose $t = \sqrt{n}\tan(u)$. On a alors que $\mathrm{d}ut = \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u$. De plus, pour que $t = 0$, on peut choisir $u = 0$ et pour que $t = \sqrt{n}$, on peut choisir $u = \frac{\pi}{4}$.

- La fonction $u \mapsto \sqrt{n}\tan(u)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$ est continue $[0, \sqrt{n}[$.

D'après la formule de changement de variable,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(1 + \frac{(\sqrt{n}\tan(u))^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + \tan(u))^2)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2(u)}\right)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(u)\sqrt{n}\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2}(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

■ **15.3.** On a, d'après la relation de Chasles,

$$\sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n-2} = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2}(u)\,\mathrm{d}u + \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(u)\,\mathrm{d}u$$

Or, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(u)\,\mathrm{d}u \geq 0$ par positivité de l'intégrale (même raisonnement qu'à la question 2.(b) de la partie 1). Donc $\sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n-2} \geq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2}(u)\,\mathrm{d}u$.

En combinant ce résultat à celui de la question précédente, on obtient finalement que $\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n-2}.}$

PARTIE 4 : Limite de F en $+\infty$

□ **16—**

■ **16.1.** Soit $n \geq 2$ un entier, d'après les questions 1.(c), 2 et 3.(c), on a que

$$\boxed{\sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt \leq \sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n-2}.}$$

■ **16.2.** Rappelons que la suite $(\sqrt{n}\,\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (question 5.(c), partie 1). Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\sqrt{n+1}\,\mathrm{I}_{n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

par produit car $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \to 1$ et $\sqrt{n+1}\,\mathrm{I}_{n+1} \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. De même, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n-2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $\left(\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge donc vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

□ **17—** On pose $u = \frac{t}{\sqrt{2}} \iff t = \sqrt{2}u$. On a alors que $\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\,dut \iff dut = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u$. De plus, si $t = 0$, alors $u = 0$ et si $t = \sqrt{n}$, alors $u = \sqrt{\frac{n}{2}}$.

- La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2}}$ est de classe C^1 sur $\left[0, \sqrt{n}\right]$.
- La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est continue $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

D'après la formule de changement de variable,

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt = \int_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u^2} \sqrt{2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right).$$

□ **18—** $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{F}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{F}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$