D.M. de Mathématiques # 5
à rendre le Jeudi 15 Novembre 2018

Lycée Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
Le devoir peut être fait à deux, les deux écritures doivent ***impérativement*** *apparaître sur la copie et en parts égales.*
On rappelle qu'il vaut mieux, à titre exceptionnel, ne pas rendre un devoir maison plutôt que de recopier une correction trouvée sur internet.

Problème *Les trois premières parties de ce problème sont totalement indépendantes.*

PARTIE 1 : Intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

□ **1—** Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale I_n est bien définie. Déterminer I_0 et I_1.

□ **2—**
- **2.1.** Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
- **2.2.** Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{I}_n \geq 0$. Justifier de plus que $\mathrm{I}_n \neq 0$.
- **2.3.** Que peut-on alors dire de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

□ **3—**
- **3.1.** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.
- **3.2.** En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $(n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\,\mathrm{I}_n$.

□ **4—**
- **4.1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a l'encadrement $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} \leqslant 1$.
- **4.2.** En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

□ **5—**
- **5.1.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $(n+1)\,\mathrm{I}_n\,\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
- **5.2.** On pose $\mathrm{J}_n = n\mathrm{I}_n^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{J}_n = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n+1}}\dfrac{\pi}{2}$. Justifier que la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$.
- **5.3.** En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{I}_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
- **5.4.** Donner un équivalent simple de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $+\infty$.

PARTIE 2 : Étude de la fonction $x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Soit la fonction donnée par $\mathrm{F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

□ **6**— Justifier que F est définie et dérivable sur **R** et déterminer F′.

□ **7**— En déduire que F est croissante sur **R**.

□ **8**— Montrer que F est impaire.

Le but de la fin de la partie 2 est de démontrer que la fonction F *admet une limite en* $+\infty$.

□ **9**— Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq e^{-1}$.

□ **10**— Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\mathrm{F}(x) \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + e^{-1}$.

□ **11**— En déduire que F est majorée sur **R**.

□ **12**— Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$. *(Indication : on pourra utiliser le théorème de la limite monotone pour les fonctions.)*

On sait à présent que la fonction F admet une limite en $+\infty$. Les deux parties suivantes ont pour but de trouver la valeur de cette limite.

PARTIE 3 : Encadrement de $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

□ **13**—

- **13.1.** En étudiant la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$, montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

En déduire que pour tout réel $y > -n$, $\left(1 + \dfrac{y}{n}\right)^n \leq e^y$.

- **13.2.** Montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$, $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n}$, puis que

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}.$$

- **13.3.** En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{d}t$.

□ **14**— À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(u)$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n+1}.$$

□ **15**—

- **15.1.** Montrer que pour tout réel $u \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $1 + \tan^2(u) = \dfrac{1}{\cos^2(u)}$.
- **15.2.** À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2}(t)dt.$$

- **15.3.** En déduire que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n-2}.$$

PARTIE 4 : Limite de F *en* $+\infty$

16—

- **16.1.** Déduire de la partie 3 que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}\,\mathrm{I}_{n-2}.$$

- **16.2.** Justifier alors que la suite $\left(\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et préciser sa limite.

17— Montrer, à l'aide du changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$, que

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\mathrm{F}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right).$$

18— Donner finalement la valeur de $\lim_{x\to\infty} \mathrm{F}(x)$ que l'on note

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$