D.S. de Mathématiques # 2

Le samedi 20/10/2018. Durée : 3 heures 30.

Lycée
Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ *proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.*

Les variables doivent être quantifiées, et les raisonnements avec les symboles logiques $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$ limités. Des points seront retirés dans le cas contraire.

Bon courage, et bonnes vacances !

Exercice 1

□ **1—** Déterminer les valeurs de $m \in \mathbf{R}$ pour lesquelles (X_1, X_2, X_3, X_4) est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ où :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□ **2—** Lorsque $\mathrm{Vect}\,(X_1, X_2, X_3, X_4) \neq \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$, déterminer sa dimension.

SOLUTION de l'Exercice 1.

□ **1—** La famille $\mathcal{B}_m = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est génératrice si et seulement si $\mathrm{Vect}\,(X_1, X_2, X_3, X_4) = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ donc si et seulement si

$$\mathrm{Rg}\,(X_1, X_2, X_3, X_4) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

On applique la méthode du pivot de Gauß pour trouver ce rang.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix} && L2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - mL_1 \\
&= 1 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & m-1 & 1-m \\ m-1 & 0 & 1-m \\ 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix} && L2 \leftarrow L_2 + L_3 \\
&= 1 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & (1-m)(2+m) \\ 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Deux cas se produisent alors.

❶ <u>Si $m \neq 1$:</u> alors $\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} m-1 & 1-m \\ 1-m & (1-m)(2+m) \end{pmatrix} = 2 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2+m \end{pmatrix} = 2 + \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & m+3 \end{pmatrix}$ en simplifiant par $1 - m \neq 0$ puis en ajoutant la première ligne à la première. Cette dernière matrice est de rang un si $m = -3$ et de rang deux sinon.

❷ Si $m=1$: nous obtenons clairement $\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

En résumé : $\boxed{\mathcal{B}_m \text{ est génératrice de } \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \text{ si et seulement si } m \notin \{-3,1\}.}$

Une autre possibilité, comme nous avons une famille libre à quatre éléments en dimension quatre, est de vérifier la liberté.

□ **2—** D'après ce qui précède nous constatons immédiatement que :

❶ Si $m=1$: $\dim \operatorname{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4) = 1$.

❷ Si $m=-3$: $\dim \operatorname{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4) = 3$.

Exercice 2 On note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+3} = 12u_{n+1} - 16u_n.$$

□ **1—** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, où $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs réelles.

□ **2—**

- **2.1.** Montrer que les seuls réels r non nuls tels que $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit dans E sont $\alpha = -4$ et $\beta = 2$.
- **2.2.** Vérifier que la suite $(n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est aussi élément de E.
- **2.3.** Montrer que la famille $((\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}, (n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}, (\beta^n)_{n\in\mathbf{N}})$ est libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

□ **3—** On note à présent $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle $a_0 = 1$ et $a_1 = a_2 = 0$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle $b_1 = 1$ et $b_0 = b_2 = 0$, et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite de E pour laquelle $c_2 = 1$ et $c_0 = c_1 = 0$.

- **3.1.** Montrer que les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont linéairement indépendantes. *On pourra essayer de se ramener à la résolution d'un système linéaire en les constantes de la combinaison linéaire nulle...*
- **3.2.** Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E, combinaison linéaire de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Que valent nécessairement les coefficients de ladite combinaison linéaire ?
- **3.3.** En déduire par récurrence double/forte que toute suite de E est combinaison linéaire de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Qu'en déduit-on sur la dimension de E ?
- **3.4.** Montrer, sans calcul supplémentaire et en utilisant **2.**, que toute suite de E s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme $(\lambda\alpha^n + (\mu n + \nu)\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}$, où $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$.

□ **4—** On note B l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E pour lesquelles : $u_n e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

- **4.1.** Montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
- **4.2.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \lambda(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}} + \mu(n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} + \nu(\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de E, avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$. Montrer que :

$$(u_n) \in B \iff [\lambda = 0].$$

- **4.3.** En déduire la dimension de B.

➥ SOLUTION de l'Exercice 2.

□ **1—** Il est clair que $E \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Si (u_n) est la suite nulle, alors on a bien :

$$u_{n+3} = 12u_{n+1} - 16u_n.$$

Ainsi, $0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}} \in E$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $(u_n) \in E$ et $(v_n) \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+3} + \mu u_{n+3} &= \lambda(12u_{n+1} - 16u_n) + \mu(12v_{n+1} - 16v_n) \\ &= 12(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - 16(\lambda u_n + \mu v_n). \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in E$. Ainsi, $\boxed{\text{E est un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}^{\mathbf{N}}}$.

□ **2—**

- **2.1.** Soit $r \in \mathbf{R}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} (r^n) \in E &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ r^{n+3} = 12r^{n+1} - 16r^n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ r^3 = 12r - 16 \quad (\text{car } r^n \neq 0) \\ &\iff r^3 - 12r + 16 = 0 \\ &\iff (r-2)(r^2 + 2r - 8) = 0 \quad (2 \text{ est racine évidente}) \\ &\iff (r-2)^2(r+4) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les seules suites géométriques de E sont } (\alpha^n) \text{ et } (\beta^n)}$, où $\boxed{\alpha = -4}$ et $\boxed{\beta = 2}$.

■ **2.2.** Considérons $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} = (n2^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Alors :

$$\begin{aligned} 12u_{n+1} - 16u_n &= 12(n+1)2^{n+1} - 16n2^n \\ &= 24n2^n + 24.2^n - 16n2^n \\ &= 8n2^n + 24.2^n \\ &= (n+3)2^{n+3} \\ &= u_{n+3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(n\beta^n) \in \mathrm{E}}$.

■ **2.3.** Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}} + \mu(n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} + \nu(\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} = 0_{\mathbf{R}^\mathbf{N}}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\lambda(-4)^n + \mu n2^n + \nu 2^n = 0.$$

Ces égalités donnent pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ le système :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \lambda & & +\nu & = 0 \\ -4\lambda & +2\mu & +2\nu & = 0 \\ 16\lambda & +8\mu & +4\nu & = 0 \end{array}\right.$$

La première équation donne alors $\nu = -\lambda$, et les deux suivantes entraînent :

$$\left\{\begin{array}{rrl} -6\lambda & +2\mu & = 0 \\ 12\lambda & +8\mu & = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\mu = 3\lambda$, d'où $\lambda = 0$ puis $\mu = \nu = 0$. Finalement, $\boxed{\text{les suites } (\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}, (n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ sont linéairement indépendantes}}$.

□ **3—**

■ **3.1.** Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda(a_n)_{n\in\mathbf{N}} + \mu(b_n)_{n\in\mathbf{N}} + \nu(c_n)_{n\in\mathbf{N}} = 0_{\mathbf{R}^\mathbf{N}}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\lambda a_n + \mu b_n + \nu c_n = 0.$$

Ces égalités donnent pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ le système :

$$\left\{\begin{array}{cccl} \lambda & & & = 0 \\ & \mu & & = 0 \\ & & \nu & = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ sont linéairement indépendantes}}$.

■ **3.2.** Soit (u_n) une suite de E. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \lambda(a_n)_{n\in\mathbf{N}} + \mu(b_n)_{n\in\mathbf{N}} + \nu(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$, alors en considérant les 3 premiers termes de ces suites on obtient les égalités :

$$\left\{\begin{array}{rccc} u_0 = & \lambda & & \\ u_1 = & & \mu & \\ u_2 = & & & \nu \end{array}\right.$$

ce qui détermine complètement les trois constantes λ, μ et ν.

■ **3.3.** Réciproquement, montrons par récurrence double/forte sur $n \in \mathbf{N}$ la proposition :

$$\mathcal{P}_n \ : « \ u_n = u_0 a_n + u_1 b_n + u_2 c_n \ ».$$

<u>Initialisation</u>. Comme $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$, alors on a bien $u_0 = u_0 a_0 + u_1 b_0 + u_2 c_0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. De même, $b_1 = 1$ et $a_1 = c_1 = 0$, d'où $\mathcal{P}_1$, et $c_2 = 1$ et $a_2 = b_2 = 0$, d'où $\mathcal{P}_2$.
<u>Hérédité</u>. Supposons $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_{n+1}$ et $\mathcal{P}_{n+2}$ vraies pour un certain $n \in \mathbf{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= 12u_{n+1} - 16u_n \\ &= 12(u_0 a_{n+1} + u_1 b_{n+1} + u_2 c_{n+1}) \qquad \text{(par hypothèse} \\ &\quad -16(u_0 a_n + u_1 b_n + u_2 c_n) \qquad \text{de récurrence)} \\ &= u_0(12a_{n+1} - 16a_n) + u_1(12b_{n+1} - 16b_n) + u_2(12c_{n+1} - 16c_n) \\ &= u_0 a_{n+3} + u_1 b_{n+3} + u_2 c_{n+3} \quad (\text{car } (a_n) \in \mathrm{E}, (b_n) \in \mathrm{E} \text{ et } (c_n) \in \mathrm{E}) \end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}_{n+3}$.
<u>Conclusion</u>. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi, on a bien prouvé que :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = u_0(a_n)_{n\in\mathbf{N}} + u_1(b_n)_{n\in\mathbf{N}} + u_2(c_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{toute suite de E est combinaison linéaire de } (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbf{N}}}$.

■ **3.4.** On déduit de la question précédente que $\mathrm{E} \subset \mathrm{Vect}((a_n), (b_n), (c_n))$. Comme $((a_n), (b_n), (c_n))$ est une famille libre de vecteurs de E, alors c'est même une base de E, qui est donc un **R**-espace vectoriel de dimension 3. On a prouvé que $((\alpha^n), (n\beta^n), (\beta^n))$ est une famille libre de vecteurs de E. Comme cette famille est constituée de $3 = \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{E}$ vecteurs, alors c'est une base de E. Ainsi, $\boxed{\text{toute suite de E s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme } (\lambda\alpha^n + (\mu n + \nu)\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}, \text{ où } (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3}$.

□ **4—**

■ **4.1.** Voir la dernière question où l'on exprime B comme un Vect (sinon vérifier les différents axiome d'un espace vectoriel).

■ **4.2.** Soit $(u_n) \in \mathrm{E}$. D'après la question précédente, il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$ tel que :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \lambda(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}} + \mu(n\beta^n)_{n\in\mathbf{N}} + \nu(\beta^n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Alors $(u_n) \in \mathrm{B}$ si et seulement si :

$$(\lambda\alpha^n + \mu n\beta^n + \nu\beta^n)e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $0 \leqslant \beta = 2 < e$, alors $0 \leqslant \dfrac{\beta}{e} < 1$ donc $\beta^n e^{-n} = \left(\dfrac{\beta}{e}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De même, $\ln \dfrac{e}{\beta} > 0$, donc par le théorème de croissances comparées, $n = o\left(e^{n \ln \frac{e}{\beta}}\right) = o\left(\dfrac{e^n}{\beta^n}\right)$. Ainsi, $n\beta^n e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement, on a donc :

$$(u_n) \in \mathrm{B} \iff [\lambda\alpha^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0].$$

Comme $|\alpha| > 1$, alors $|\alpha^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi :

$$(u_n) \in \mathrm{B} \iff \lambda = 0.$$

On en déduit aussi que $\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{Vect}((n\beta^n), (\beta^n))}$ donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

■ **4.3.** Comme $((n\beta^n), (\beta^n))$ est une famille libre (c'est une famille extraite d'une famille libre), alors c'est une base de B. Ainsi, $\boxed{\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{B} = 2}$.

Problème **D'après concours CNC BCPST** Pour tout $(p, q) \in (\mathbf{N}^\star)^2$, on notera $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels à p lignes et q colonnes. La transposition sera notée par ${}^{\mathsf{T}}(.)$ et le rang par $\mathrm{Rg}\,(.)$. Pour tout entier k, $\mathbf{R}_k[\mathrm{X}]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k. Dans tout le problème, $x_0, \ldots, x_n$ désignera des réels deux à deux distincts, et on notera Π la fonction polynomiale définie par $\Pi(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Enfin, on définit pour tout entier naturel m une application f_m par :

$$f_m : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_m[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(x_0), \ldots, \mathrm{P}(x_n)) \end{array} \right. .$$

Notons qu'*a priori* m et n sont des entiers quelconques et pas forcément égaux.

Étude de l'application f_m.

□ **1—** Redémontrer que $\mathbf{R}_m[\mathrm{X}]$ est un espace vectoriel de dimension $m + 1$.

□ **2—** Montrer que l'application f_m est une application linéaire.

□ **3—** On définit les polynômes $\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n$ par

$$\mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

pour $i \in [\![0 \,; n]\!]$. Par exemple, si $n = 2$, les polynômes $\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2$ associés à la famille x_0, x_1, x_2 sont :

$$\mathrm{L}_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad \mathrm{L}_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad \mathrm{L}_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

■ **3.1.** Pour $i \in [\![0 \,; n]\!]$, quel est le degré de L_i ? Vérifier que pour tout $k \in [\![0 \,; n]\!]$, $\mathrm{L}_i(x_k) = \delta_{i,k}$ avec $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon.

■ **3.2.** Calculer $f_n(\mathrm{L}_i)$ pour $i \in [\![0 \,; n]\!]$. Que représente la famille $(f_n(\mathrm{L}_0), \ldots, f_n(\mathrm{L}_n))$ pour l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{n+1}$?

■ **3.3.** Montrer que la famille $(\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n)$ est libre puis justifier que c'est une base de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$. *On pourra calculer l'image par f_n d'une combinaison linéaire d'éléments de cette famille.*

□ **4—** Soit $(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, on pose $\mathrm{P}_y = y_0\mathrm{L}_0 + y_1\mathrm{L}_1 + \ldots + y_n\mathrm{L}_n$.

■ **4.1.** Calculer $f_n(\mathrm{P}_y)$.

■ **4.2.** En déduire que f_n est surjective.

■ **4.3.** Justifier que f_n est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

□ **5—** Si $\mathrm{R} \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$ vérifie : $\forall [\![0 \,; n]\!], \quad \mathrm{R}(x_i) = 0$, que dire de R ?

On admet dans la suite le résultat suivant de *division euclidienne*.
Propriété Soient $\mathrm{P} \in \mathbf{R}_m[\mathrm{X}]$ et $\widetilde{\mathrm{P}} \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$, alors il existe un unique couple $(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \mathbf{R}[\mathrm{X}] \times \mathbf{R}[\mathrm{X}]$ tel que : $\mathrm{P} = \widetilde{\mathrm{P}}\mathrm{Q} + \mathrm{R}$, **et** $\deg \mathrm{R} < \deg \widetilde{\mathrm{P}} = n$.

□ **6— Dans cette question, on suppose que** $m \geqslant n + 1$.

■ **6.1.** Pour tout $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, justifier que $y_0\mathrm{L}_0 + \ldots + y_n\mathrm{L}_n \in \mathbf{R}_m[\mathrm{X}]$ puis calculer $f_m(y_0\mathrm{L}_0 + \ldots + y_n\mathrm{L}_n)$ et en déduire que l'application f_m est surjective.

- **6.2.** Que vaut $\dim \operatorname{Ker} f_m$? L'application f_m est-elle injective ?
- **6.3.** Montrer que : $\forall P \in \mathbf{R}_m[X], \quad \exists!(P_1, P_2) \in \operatorname{Ker} f_m \times \mathbf{R}_n[X], \quad P = P_1 + P_2$.

□ **7— Dans cette question on suppose que $m \leqslant n$.**
- **7.1.** Montrer que f_m est injective.
- **7.2.** Quel est le noyau de f_m ? Quel est son rang ?
- **7.3.** Montrer que f_m est un isomorphisme d'espaces vectoriels si et seulement si $n = m$.

Approximation polynomiale au sens des moindres carrés.

On considère des réels $y_0, \ldots, y_n$ qui sont respectivement les images des réels $x_0, \ldots, x_n$ par une fonction φ, et on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbf{R}_m[X]$ tels que la quantité

$$\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2$$

soit minimale, et expliciter ladite quantité minimale. On parle alors d'approximation polynomiale au sens des moindres carrés de la fonction φ aux points $x_0, \ldots, x_n$.

On pourra noter que lorsque le minimum est cherché parmi les polynômes de degré un, nous retrouvons le problème de recherche de la droite des moindres carrés au plus près du nuage de points $(x_i, \varphi(x_i))_{i=1}^{n}$.
Dans toute cette partie, il conviendra d'utiliser les résultats établis précédemment afin de ne pas refaire plusieurs fois le même travail.

Étude du cas $m \geqslant n+1$.

□ **8—** Donner un polynôme $Q_0 \in \mathbf{R}_m[X]$ tel que $f_m(Q_0) = (y_0, \ldots, y_n)$. Que vaut $\Phi_m(Q_0)$?

□ **9—** En déduire la valeur minimale de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathbf{R}_m[X]$, et préciser à l'aide de Q_0 et $\operatorname{Ker} f_m$ l'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte.

Étude du cas $m \leqslant n$.

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbf{R})$ et $b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$.

□ **10—** Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$. On lui associe le polynôme $P_v \in \mathbf{R}_m[X]$ défini par $P_v(x) = \sum_{k=0}^{m} v_k x^k$.
- **10.1.** Calculer le produit Av et l'exprimer à l'aide des valeurs $P_v(x_0), \ldots, P_v(x_n)$.
- **10.2.** Montrer alors que : $Av = 0 \implies v = 0$.

□ **11—** Soit $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$. Calculer ${}^{\mathsf{T}}u.u$ en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_n$ puis en déduire que ${}^{\mathsf{T}}u.u \geqslant 0$ et que ${}^{\mathsf{T}}u.u = 0$ si et seulement si $u = 0$.

□ **12—**
- **12.1.** Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$ tel ${}^{\mathsf{T}}AAv = 0$. On pose $u = Av$. Calculer ${}^{\mathsf{T}}u.u$, en déduire que $Av = 0$ puis que $v = 0$.
- **12.2.** En déduire $\operatorname{Rg}({}^{\mathsf{T}}AA)$ et justifier qu'elle est inversible.

□ **13—** Expliciter les coefficients de la matrice ${}^{\mathsf{T}}AA$ en fonction de $x_0, \ldots, x_n$.

□ **14—** On pose $M = {}^{\mathsf{T}}AA$ et $c = {}^{\mathsf{T}}Ab$. Justifier que le système linéaire $MX = c$ admet une unique solution X qu'on exprimera en fonction de M^{-1} et c.

Dans la suite nous noterons cette solution w, on lui associe le polynôme P_w défini précédemment.

□ **15—** On définit une application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ v & \longmapsto & {}^{\mathsf{T}}(b - Av)(b - Av) \end{array} \right.$.
- **15.1.** Donner pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$ une forme développée de $g(v)$ et montrer que $g(w) = {}^{\mathsf{T}}b.b - {}^{\mathsf{T}}bAw$.

- **15.2.** Montrer que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$, on a : $g(v) - g(w) = {}^{\mathsf{T}}(w-v)^{\mathsf{T}}\mathrm{A}.\mathrm{A}(w-v)$.
- **15.3.** En déduire que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$, $g(v) \geqslant g(w)$ et que $g(v) = g(w)$ si et seulement si $v = w$.

□ **16—** Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbf{R}_m[\mathrm{X}]$. On pose $\mathrm{V_P} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$.
Calculer les composantes du vecteur $b - \mathrm{AV_P}$ et en déduire que

$$\Phi_m(\mathrm{P}) = g(\mathrm{V_P}).$$

□ **17—**
- **17.1.** Déduire de tout ce qui précède que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbf{R}_m[\mathrm{X}]$, on a : $\Phi_m(\mathrm{P}) \geqslant \Phi_m(\mathrm{P}_w)$ avec égalité si et seulement si $\mathrm{P} = \mathrm{P}_w$.
- **17.2.** Que vaut le minimum ?

On pourra se servir pour cette dernière partie des résultats précédents même s'ils n'ont pas été complètement établis.

Application.

□ **18—** On prend $n = 3$, $m = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 0$.
- **18.1.** Calculer les matrices A et ${}^{\mathsf{T}}\mathrm{A}.\mathrm{A}$.
- **18.2.** Calculer le vecteur ${}^{\mathsf{T}}\mathrm{A}.b$.
- **18.3.** Résoudre le système linéaire ${}^{\mathsf{T}}\mathrm{A}.\mathrm{AX} = {}^{\mathsf{T}}\mathrm{A}b$.
- **18.4.** Quel est le polynôme P_0 de degré $\leqslant 2$ qui minimise Φ_2 sur $\mathbf{R}_2[\mathrm{X}]$? Que vaut le minimum ?
- **18.5.** Tracer le graphe de la fonction $t \longmapsto \mathrm{P}_0(t)$ et représenter les points (x_i, y_i) sur le même graphique.

SOLUTION

□ **1—** Voir cours.

□ **2—** Soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in \mathbf{R}_m[\mathrm{X}]$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors :
$f_m(\lambda\mathrm{P}_1 + \mu\mathrm{P}_2) = ((\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(x_0), \ldots, (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(x_n)) = \lambda(\mathrm{P}(x_0), \ldots, \mathrm{P}(x_n)) + \mu(\mathrm{Q}(x_0), \ldots, \mathrm{Q}(x_n)) = \lambda f_m(\mathrm{P}) + \mu f_m(\mathrm{Q})$. Donc : $\boxed{\text{L'application } f_m \text{ est linéaire.}}$

□ **3—**
- **3.1.** On enlève à chaque fois un des termes dans le produit, chaque L_j est donc de degré $n + 1 - 1 = \boxed{n}$.

Si $i = k$, alors $\mathrm{L}_i(x_k) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j}$. Sinon j peut prendre la valeur k, ce produit vaut zéro et 1 dans le cas contraire. Or, j prend la valeur k sauf si l'on exclut de terme $x - x_k$ donc sauf si $i = k$. On obtient le résultat.

- **3.2.** On en déduit immédiatement que $(f_n(\mathrm{L}_0), ..., f_n(\mathrm{L}_n))$ est la $\boxed{\text{base canonique de } \mathbf{R}^{n+1}}$ puisque $f_n(\mathrm{L}_0)$ possède un 1 uniquement en position i.
- **3.3.** On se donne donc une combinaison linéaire nulle d'éléments de la famille, et on justifie que les coefficients sont tous nuls.

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, tels que : $\lambda_0\mathrm{L}_0 + \ldots + \lambda_n\mathrm{L}_n = 0$. Alors appliquons f_n à gauche et utilisons la propriété de linéarité :

$$f_n(\lambda_0\mathrm{L}_0 + \ldots + \lambda_n\mathrm{L}_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_n(\mathrm{L}_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i = f_n(0) = 0.$$

Or, la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ est une famille libre donc pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$ on obtient : $\lambda_i = 0$. Bref, $\boxed{\text{la famille } (\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n) \text{ est libre.}}$
C'est de plus une base puisque $\dim \mathbf{R}_n[\mathrm{X}] = n + 1$ est le nombre d'éléments de la famille.

□ **4—**
- **4.1.** Un simple calcul montre que $f_n(\mathrm{P}_y) = y_0 f_n(\mathrm{L}_0) + \ldots + y_n f_n(\mathrm{L}_n) = y_0 e_0 + y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Nous avons exploité) nouveau la linéarité de l'application f_n.
- **4.2.** Ainsi, étant donné $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}$, nous avons $f_n(\mathrm{P}_y) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sous les notations précédentes. Ce qui prouve bien que : $\boxed{\text{l'application } f_n \text{ est surjective.}}$
- **4.3.** Elle est linéaire de $\mathbf{R}_n + 1[\mathrm{X}]$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et surjective, de plus $\dim \mathbf{R}^{n+1} = \dim \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$, donc elle est : $\boxed{\text{un isomorphisme d'espaces vectoriels.}}$

□ **5—** Un polynôme de degré au plus n possédant au moins $n+1$ racines est forcément nul. Donc : $\boxed{R = 0}$.

□ **6—**
■ **6.1.** Le polynôme $y_0L_0 + \ldots + y_nL_n$ est une combinaison linéaire de polynômes de degré au plus $n+1$, or $n+1 \leqslant m$; $\boxed{\text{il est donc en particulier dans } \mathbf{R}_m[X]}$.
De la même manière que précédemment, on calcule par linéarité : $f_m(y_0L_0+\ldots+y_nL_n) = y_0f_m(L_0)+\ldots+y_nf_m(L_n) = y_0e_0+\ldots+y_ne_n$. Il s'agit de la même expression que précédemment, on a juste constaté que ça avait du sens d'évaluer f_m en $y_0L_0 + \ldots + y_nL_n$ puisque $\deg(y_0L_0 + \ldots + y_nL_n) \leqslant m$. De la même manière que précédemment, on écrit donc tout vecteur $(y_0, \ldots, y_n)$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ comme image d'un polynôme de $\mathbf{R}_m[X]$ (et même de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$). $\boxed{\text{L'application } f_m \text{ reste donc surjective.}}$

■ **6.2.** D'après le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} f_m = \dim \mathbf{R}_m[X] - \dim \operatorname{Im} f_m = m+1-(n+1) = m-n$. Donc l'application ne peut être injective puisque $m - n \neq 0$ si $m \geqslant n+1$.

■ **6.3.** Soit $P \in \mathbf{R}_m[X]$, alors le polynôme P_1 s'annule en $x_0, \ldots, x_n$. Donc il s'écrit sous la forme $P_1 = \Pi Q$ avec Q un polynôme à trouver.
Appliquons le théorème de division euclidienne à $\widetilde{P} = \Pi$. Il existe alors un unique couple (Q, R) tel que $P = \Pi Q + R$ où $\deg R < \deg \Pi = n+1$ d'où $\deg R \leqslant n$.
Finalement, $\boxed{\text{en posant } P_1 = \Pi Q \text{ et } P_2 = R \text{ nous obtenons le résultat.}}$
$\boxed{\text{Il y a aussi unicité}}$ puisqu'il y a unicité de Q et R dans la division euclidienne.

□ **7—**
■ **7.1.** Soit $P \in \mathbf{R}_m[X]$ dans le noyau de f_m. Alors P s'annule en $x_0, \ldots, x_n$. Comme $m \leqslant n$ nous avons donc un polynôme de degré m qui admet strictement plus de racines que son degré donc P est nul. $\boxed{\text{L'application } f_m \text{ est injective.}}$

■ **7.2.** De ce qui précède $\operatorname{Ker} f_m = \{0\}$ donc d'après le théorème du rang : $\operatorname{Rg} f_m = \dim \mathbf{R}_m[X] - \dim \operatorname{Ker} f_m = \boxed{m+1}$.

■ **7.3.** L'application f_m est un isomorphisme si et seulement si f_m est surjective d'après ce qui précède. Or f_m est surjective si et seulement si $\operatorname{Rg} f_m = n+1 = m+1$. D'où $\boxed{f_m \text{ est un isomorphisme si et seulement si } n = m.}$

Étude du cas $m \geqslant n+1$.

□ **8—** Dans le cas $m \geqslant n+1$, nous avons déjà vu que $\boxed{Q_0 = y_0L_0 + \ldots + y_nL_n \text{ convient.}}$
Calculons $\Phi_m(Q_0) = \Phi_m(y_0L_0 + \ldots + y_nL_n)$. Comme le polynôme $y_0L_0 + \ldots + y_nL_n$ vaut y_i en x_i (déjà plus haut), nous avons :
$\Phi_m(y_0L_0 + \ldots + y_nL_n) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - y_i)^2 = 0$. Donc $\boxed{\Phi_m(y_0L_0 + \ldots + y_nL_n) = \Phi_m(Q_0) = 0.}$

□ **9—** Puisque $\Phi_m(P) \geqslant 0$ pour tout P, dans ce cas le minimum est atteint pour $P = Q_0$. De plus, $\Phi_m(P) = 0$ si et seulement si pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$, $y_i = P(x_i)$ puisqu'une somme de quantités positives est nulle si et seulement si chaque terme est nul. Donc si et seulement si $f_m(P) = (y_0, \ldots, y_n)$. Mais d'autre part $(y_0, \ldots, y_n) = f_m(Q_0)$ donc $f_m(P - Q_0) = 0$ et $P - Q_0 \in \operatorname{Ker} f_m$. $\boxed{\text{Le minimum zéro est donc atteint en les éléments de } Q_0 + \operatorname{Ker} f_m = \{Q_0 + Q, Q \in \operatorname{Ker} f_m\}.}$

□ **10—**
■ **10.1.** Un simple calcul matriciel nous donne immédiatement : $Av = \begin{pmatrix} v_0 + x_0v_1 + \ldots + x_0^m v_m \\ \vdots \\ v_0 + x_nv_1 + \ldots + x_n^m v_m \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} P_v(x_0) \\ \vdots \\ P_v(x_n) \end{pmatrix}}$.

■ **10.2.** Donc si $Av = 0$, on a $P_v(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$. Donc P_v, de degré au plus m possède au moins $n+1$ racines. Comme $m \leqslant n$, on a : $\boxed{P_v = 0.}$

□ **11—** On a : ${}^{\mathsf{T}}u.u = \sum_{i=0}^{n} u_i^2$. D'où : $\boxed{{}^{\mathsf{T}}u.u \geqslant 0}$ et $\boxed{{}^{\mathsf{T}}u.u = 0 \text{ si et seulement si } u = 0.}$ (somme de termes positifs).

□ **12—**
■ **12.1.** On a : ${}^{\mathsf{T}}uu = {}^{\mathsf{T}}(Av)(Av) = {}^{\mathsf{T}}v{}^{\mathsf{T}}AAv = 0$ puisque ${}^{\mathsf{T}}AAv = 0$. Donc d'après la question précédente on a $u = Av = 0$ et toujours d'après une question précédente, on a $\boxed{v = 0.}$

■ **12.2.** On vient de démontrer que $\operatorname{Ker}({}^{\mathsf{T}}AA) = 0$. Donc $\operatorname{Rg}({}^{\mathsf{T}}AA) = (n+1)(m+1) - 0$ d'après le théorème du rang. $\boxed{\text{La matrice } {}^{\mathsf{T}}AA \text{ est donc inversible.}}$

□ **13—** Le terme i, j de la matice ${}^{\mathsf{T}}AA$ est $\sum_{k=1}^{m+1} A_{i,k}A_{k,j}$ or $A_{i,j} = x_{i-1}^{j-1}$ donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{m+1} x_{i-1}^{k-1} x_{k-1}^{j-1}}$.

□ **14—** Le système $MX = c$ est équivalent à $X = M^{-1}c$ puisque M est inversible. Il admet donc pour unique solution $\boxed{w = M^{-1}c.}$

□ **15—**
■ **15.1.** On développe par linéarité de la transposition et du produit matriciel : pour $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbf{R})$, on a $g(v) = {}^{\mathsf{T}}b.b - {}^{\mathsf{T}}bAv - {}^{\mathsf{T}}v{}^{\mathsf{T}}Ab + {}^{\mathsf{T}}v{}^{\mathsf{T}}AAv$. Or ${}^{\mathsf{T}}AAw = c = {}^{\mathsf{T}}Av$, donc : $\boxed{g(w) = {}^{\mathsf{T}}bb - {}^{\mathsf{T}}bAw}$ puisque le dernier terme vaut ${}^{\mathsf{T}}v(-c + Mw) = 0$.

■ **15.2.** Donc $g(v) - g(w) = {}^{\mathsf{T}}b.b - {}^{\mathsf{T}}bAv - {}^{\mathsf{T}}v{}^{\mathsf{T}}Ab + {}^{\mathsf{T}}v{}^{\mathsf{T}}AAv - {}^{\mathsf{T}}bb + {}^{\mathsf{T}}bAw = -{}^{\mathsf{T}}bAv - {}^{\mathsf{T}}v{}^{\mathsf{T}}Ab + {}^{\mathsf{T}}v{}^{\mathsf{T}}AAv + {}^{\mathsf{T}}bAw$ d'où : $\boxed{g(v) - g(w) = {}^{\mathsf{T}}(w-v){}^{\mathsf{T}}A.A(w-v)}$.

■ **15.3.** Appliquant **11** à $u = A(w-v)$, nous obtenons que $g(v) \geqslant g(w)$ et $g(v) = g(w)$ si et seulement si $v = w$.

□ **16—** On calcule : $b - AV_p = \begin{pmatrix} y_0 - (a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_m x_0^m) \\ y_1 - (a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_m x_1^m) \\ \vdots \\ y_n - (a_0 + a_1x_n + \ldots + a_m x_n^m) \end{pmatrix}$. La quantité $\Phi_m(P)$ est la somme des carrés des coordonnées du vecteur $b - AV_p$. Cela s'écrit matriciellement : $\boxed{\Phi_m(P) = {}^{\mathsf{T}}(b - AV_p)(b - AV_p) = g(V_p).}$

□ **17—**

■ **17.1.** La question revient à montrer que : $g(V_P) \geqslant g(w)$ avec égalité si et seulement si $P = P_w$. Ce fait est exactement la question **15.3** puisque $V_P = w$ si et seulement si $P = P_w$ (deux polynômes sont égaux si et seulement si ses coefficients le sont).

■ **17.2.** Le minimum est donc atteint pour $P = P_w$ et il vaut $g(w) = {}^{\mathsf{T}}b.b - {}^{\mathsf{T}}bAw$

Application.

□ **18—** La matrice A est dans ce cas :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On a de plus : $\boxed{{}^{\mathsf{T}}AA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}.}$

□ **19—** On note aussi que $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et que $\boxed{{}^{\mathsf{T}}A.b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.}$

□ **20—** Il s'agit donc de résoudre : $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit $\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 2y + 6z & = & 4 \\ 2x + 6y + 8z & = & 0 \\ 6x + 8y + 18z & = & 2 \end{array} \right.$. On obtient après application de la méthode du pivot de Gauß : $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/10 \\ 1/10 \\ -1/2 \end{pmatrix} := w}$.

□ **21—** D'après les parties précédentes, puisque nous sommes dans le cas $n = 3 \geqslant m = 2$, on en déduit que le polynôme de $\mathbf{R}_m[X] = \mathbf{R}_2[X]$ qui minimise notre fonction est $\boxed{P_w = \frac{17}{10} + \frac{1}{10}X - \frac{1}{2}X^2.}$

Toujours d'après une question précédente, le minimum vaut $\boxed{g(w) = {}^{\mathsf{T}}bb - {}^{\mathsf{T}}bAw = 6 - 5,8 = 0,2.}$

□ **22—** Notre trinôme trouvé précédemment semble bien interpoler la bonne famille de points.