

Programme de colles # 4 — Semaine du 15/10/2018 au 20/10/2018

Au programme cette semaine : on reprend les espaces vectoriels ; et on y ajoute quelques éléments sur les applications linéaires.

1. Espaces Vectoriels

Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $E = \mathbf{K}^n$, elles sont généralisées ici.

- ❶ **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de \mathbf{R}^n , des suites et des fonctions. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.
- ❷ **Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases.** Notion de coordonnées d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices. Algorithme de la base incomplète et conséquences : théorème de la base extraite/incomplète.
- ❸ **Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.** Comparaison entre le nombre de vecteurs d'une famille libre/génératrice (résultat que nous avons admis). Définition de la dimension, toutes les bases ont même cardinal. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de dim E

vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Dimension d'un produit cartésien. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré (nous n'avons pas encore vu qu'il s'agit du rang de la matrice associée dans une base).

❖ Questions de cours.

- ✓ (Énoncé & Preuve) L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.
- ✓ (Énoncé & Preuve) L'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre deux est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions deux fois dérivables. Famille \mathbf{R} -génératrice de l'ensemble de ces solutions lorsque les coefficients sont constants.
- ✓ Présentation de l'algorithme de la base incomplète pour compléter une famille libre (ℓ_1, \dots, ℓ_p) en une base d'un espace vectoriel de dimension finie à l'aide d'une famille génératrice (g_1, \dots, g_q) .

Ne pas hésiter à proposer en plus large quantité des exercices spécifiques au programme de 2ème année, notamment les espaces vectoriels de fonctions, de suites, de polynômes.

2. Applications Linéaires

Sur ce chapitre pour cette semaine, en revanche, les exercices doivent rester simples (peu d'exercices traités pour le moment) ; par exemple des calculs d'images et de noyaux.

- ❶ **Généralités.** Notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Cas des formes linéaires,

endomorphisme identique et homothéties. Détermination des applications \mathbf{C} et \mathbf{R} -linéaires de \mathbf{C}^p et des applications \mathbf{K} -linéaires de \mathbf{K}^p dans \mathbf{K}^r . Exemples faisant intervenir des polynômes, fonctions, suites. Restriction, structure d'espace vectoriel de l'ensemble des applications linéaires. Propriétés calculatoires (identité $u^n - v^n$; binôme de Newton). Notion d'image directe, d'image réciproque, image et noyau. Structure d'espace vectoriel de toute image directe/réciproque d'un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide de l'image/noyau. Isomorphismes, automorphismes (notation $\mathcal{GL}(E)$ pour l'ensemble des automorphismes sur E, un espace vectoriel), l'inverse d'une bijection linéaire est linéaire, inverse d'une composée. Équations linéaires du type $f(x) = y_0$ avec $(x, y_0) \in E \times F$ où E, F sont deux espaces vectoriels et f une application linéaire $E \rightarrow F$ et structure de l'ensemble des solutions, mise en perspective avec le cas $E = \mathcal{D}^{1/2}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux vues précédemment.

- ❷ **Cas particulier de la dimension finie.** Image de familles de vecteurs, caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijektivité d'une application linéaire en fonction de l'image d'une base de l'espace de départ. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension. Équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité pour des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension.

❖ Questions de cours.




- ✓ (Énoncé & Preuve) Définition d'une image directe, réciproque. Les images directes et réciproques d'espaces vectoriels sont des sous-espaces vecto-

riels des espaces vectoriels de départ et d'arrivée.
Insister sur la méthodologie.

3. Algorithmique, TP2

- ① **Réversivité.** Notion de fonction récursive, exemples de construction de suites récurrentes de manière récursive.
- ② **Complexité & Terminaison.** Correction/terminaison d'un algorithme. Notion de complexité spatiale & temporelle. Exemples : exponentiation rapide et algorithme de Horner pour le calcul de $P(x)$ avec P un polynôme et $x \in \mathbf{R}$ présentés sous forme récursive. Comparaison des complexités temporelles avec celles des méthodes naïves.
- ③ **Tris.** Révisions sur le tri par insertion, et le tri à bulles. Tri rapide ou *Quicksort* de manière récursive. Le tri fusion a été donné, mais abordé par très peu d'étudiants.

✚ Questions de cours.

- ✓  python™ Algorithme de Horner, méthode récursive. Calcul de la complexité et comparaison avec la méthode naïve.
- ✓  python™ Fonction qui détermine si une liste est triée par ordre croissant ou non.
- ✓  python™ Algorithme de tri rapide ou *Quicksort*.


Au programme de la semaine suivante : les espaces vectoriels et les applications linéaires où l'on ajoutera leur écriture matricielle. Révisions d'algorithmique.


Programme de colles # ③ — Semaine du 01/10/2018 au 07/10/2018

Au programme cette semaine : on reprend les fonctions de plusieurs variables, on ajoute les espaces vectoriels.

1. Fonctions de plusieurs variables


Beaucoup de notions ont été définies pour des fonctions de n variables. Merci de ne proposer cependant que des exercices pour des fonctions de $n = 2$ variables conformément au programme.

- 1 Introduction; définition, surface associée à une fonction de deux variables et lignes de niveaux.
 python™ Méthode pour représenter une telle surface à l'aide de la bibliothèque `matplotlib`.
- 2 Limites et continuité; quelques rudiments de topologie pour définir correctement la notion de limite (norme euclidienne, boule ouverte, ensemble ouvert, adhérence d'une partie de \mathbf{R}^n).

 **Attention** Aucun exercice purement topologique n'est attendu du programme.

Limite en un point de \mathbf{R}^n , méthode pour nier l'existence d'une limite. Continuité : contre-exemple pour justifier que la continuité partielle n'entraîne pas la continuité globale.

- 3 Dérivabilité directionnelle et partielle. Propriétés et gradient. Fonctions de classe C^1 et C^2 . Formules de la chaîne pour les fonctions de deux variables. Formule de Taylor. Le caractère C^1 entraîne la continuité. Théorème de Schwarz. Condition nécessaire d'existence d'un extrema local/global, points critiques.

 **Attention** La notion de différentiabilité n'est pas au programme de BCPST, la formule de Taylor-Young à l'ordre un est donc énoncée sous l'hypothèse plus forte C^1 .


❖ Questions de cours.

- ✓ (sans preuve) Formule de Taylor à l'ordre un pour les fonctions de deux variables de classe C^1 , interprétation géométrique avec le plan tangent. Application à $(x, y) \mapsto \sqrt{x^3 + y^3}$ pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1,02^3 + 2,07^3}$ sans calculatrice.
- ✓ (sans preuve) Formule de la chaîne pour la dérivation partielle en u et v d'expressions du type $f(x(u, v), y(u, v))$ avec x, y, f de classe C^1 . Application au changement de variable polaire.

2. Espaces Vectoriels

Les étudiants connaissent depuis la première année l'ensemble des notions pour $E = \mathbf{K}^n$, elles sont généralisées ici.

- 1 Structure d'espace vectoriel. Définition. Structure d'espace vectoriel d'un produit cartésien, des espaces de fonctions, règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de \mathbf{R}^n , des suites et des fonctions. Les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux forment un espace vectoriel. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.
- 2 Familles de vecteurs : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases. Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques.

 **Attention** Nous n'avons pas encore vu la dimension pour des espaces vectoriels généraux, ni les théorèmes de la base incomplète/extraite. Les étudiants connaissent cependant la notion de dimension pour $E = \mathbf{K}^n$.




❖ Questions de cours.

- ✓ (Énoncé et preuve) L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille.
- ✓ (Énoncé et preuve) L'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre deux est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions deux fois dérivables. Famille génératrice de l'ensemble de ces solutions lorsque les coefficients sont constants.

3. Algorithmique, TP2

- 1 Récursivité : notion de fonction récursive, construction de suites récurrentes de manière récursive.
- 2 Complexité & Terminaison. Correction/terminaison d'un algorithme. Notion de complexité spatiale & temporelle. Exemples : exponentiation rapide et algorithme de Horner pour le calcul de $P(x)$ avec P un polynôme et $x \in \mathbf{R}$ présentés sous forme récursive. Comparaison des complexités temporelles avec celles des méthodes naïves.
- 3 Tris : révisions sur le tri par insertion, et le tri à bulles. Tri rapide ou *Quicksort* de manière récursive. Le tri fusion a été donné, mais abordé par très peu d'étudiants.

✦ Questions de cours.

- ✓  python™ Algorithme de Horner, méthode récursive. Calcul de la complexité et comparaison avec la méthode naïve.
 - ✓  python™ Fonction qui détermine si une liste est triée par ordre croissant ou non.
 - ✓  python™ Algorithme de tri rapide ou *Quicksort*.
-


Au programme de la semaine prochaine : les espaces vectoriels, les applications linéaires, et encore les tris.

Programme de colles # ② — Semaine du 24/09/2018 au 01/10/2018

Au programme cette semaine : on reprend le programme précédent et on y ajoute les fonctions de plusieurs variables. L'oral débutera par une question de cours prise au choix dans la liste ci-dessous.


1. Fonctions d'une variable réelle : continuité, dérivabilité, développements limités

- ① Généralités sur les fonctions : graphe, parité, périodicité, etc.
- ② Limite et continuité : définition « avec des ε », limite à droite/gauche, caractérisation séquentielle, propriétés de la limite.
- ③ Continuité : définition, version séquentielle, prolongements, théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, théorème de Heine (fonction continue sur un segment).
- ④ Dérivation : définition, propriétés, dérivée à droite/gauche, extrema et point critique intérieur au domaine de définition. Rolle, accroissements finis.
- ⑤ Développements limités : propriétés (somme, produit, composition), formule de Taylor-Young, développements usuels à connaître. Applications.

 **Attention** Les fonctions de trigonométrie hyperbolique ch et sh ne sont pas au programme de BCPST.

❖ Questions de cours.

- ✓ Construction de la fonction Arctan , formule de Arctan' et de son développement limité (avec justification). Énoncé de la formule générale donnant la dérivée d'une bijection réciproque.

- ✓  python™ Fonction résolvant de manière approchée l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie où f est une fonction continue.

2. Équations différentielles

- ① Équations différentielles linéaires d'ordre un : forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (variation de la constante et second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t))$$

nous avons vu la méthode avec des exponentielles complexes. Les étudiants sont cependant libres d'utiliser leurs résultats de première année aussi.

- ② Équations différentielles linéaires d'ordre deux : forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t))$$

nous avons vu la méthode avec des exponentielles complexes. Les étudiants sont cependant libres d'utiliser leurs résultats de première année aussi.

 **Attention** la méthode de variation des constantes n'est pas au programme.


- ③ Dynamique des populations.
- ④ Méthode d'Euler : présentation de la méthode et premier exemple (approximation de l'exponentielle).


❖ Questions de cours.

- ✓ Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en fonction de l'ensemble des solutions homogènes et d'une solution particulière (avec preuve). Forme de l'ensemble des solutions de l'homogène et recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est du type $t \mapsto P(t)e^{mt}$ avec $P \in \mathbf{K}[X]$ et $m \in \mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}).
- ✓ Présentation de la méthode d'Euler pour une équation différentielle du type $y'(t) = f(t, y(t))$ où $f : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, avec $I = [0, R]$, $R > 0$ un segment. Application à une équation différentielle simple. Nous n'avons pas encore pratiqué en TP, seulement le principe doit être connu pour le moment et pas son implémentation informatique.

3. Fonctions de plusieurs variables

Beaucoup de notions ont été définies pour des fonctions de n variables. Merci de ne proposer cependant que des exercices pour des fonctions de $n = 2$ variables conformément au programme.


- ① Introduction ; définition, surface associée à une fonction de deux variables et lignes de niveaux.  python™ Méthode pour représenter une telle surface à l'aide de la bibliothèque `mpl_toolkits`.
- ② Limites et continuité ; quelques rudiments de topologie pour définir correctement la notion de limite (norme euclidienne, boule ouverte, ensemble ouvert, adhérence d'une partie de \mathbf{R}^n).

 **Attention** Aucun exercice purement topologique n'est attendu du programme.

Limite en un point de \mathbf{R}^n , méthode pour nier l'existence d'une limite. Continuité : contre-exemple

pour justifier que la continuité partielle n'entraîne pas la continuité globale.

- ③ Dérivabilité directionnelle et partielle. Propriétés et gradient. Fonctions de classe C^1 et C^2 . Formules de la chaîne pour les fonctions de deux variables. Formule de Taylor. Le caractère C^1 entraîne la continuité. Théorème de Schwarz. Condition nécessaire d'existence d'un extrema local/global, points critiques.


 **Attention** La notion de différentiabilité n'est pas au programme de BCPST, la formule de Taylor-Young à l'ordre un est donc énoncée sous l'hypothèse plus forte C^1 .

Questions de cours.

- ✓ Formule de Taylor à l'ordre un pour les fonctions de deux variables de classe C^1 , interprétation géométrique avec le plan tangent. Application à $(x, y) \mapsto \sqrt{x^3 + y^3}$ pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{1,02^3 + 2,07^3}$ sans calculatrice.
- ✓ Formule de la chaîne pour la dérivation partielle en u et v d'expressions du type $f(x(u, v), y(u, v))$ avec x, y, f de classe C^1 . Application au changement de variable polaire.

4. Algorithmique

Questions de cours.

- ✓  python™ Fonction qui calcule les factorielles d'un entier. Fonction qui renvoie si une liste L contient l'élément x, ainsi que la première position de x dans cette liste, sans utiliser l'instruction `in`.


Au programme de la semaine prochaine : les espaces vectoriels et les tris en algorithmique.

Programme de colles # 1 — Semaine du 17/09/2018 au 22/09/2018

Au programme cette semaine : des révisions d'analyse de première année. L'oral débutera par une question de cours prise au choix dans la liste ci-dessous.

1. Fonctions d'une variable réelle : continuité, dérivabilité, développements limités


- ① Généralités sur les fonctions : graphe, parité, périodicité, etc.
- ② Limite et continuité : définition « avec des ε », limite à droite/gauche, caractérisation séquentielle, propriétés de la limite.
- ③ Continuité : définition, version séquentielle, prolongements, théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, théorème de Heine (fonction continue sur un segment).
- ④ Dérivation : définition, propriétés, dérivée à droite/gauche, extrema et point critique intérieur au domaine de définition. Rolle, accroissements finis.
- ⑤ Développements limités : propriétés (somme, produit, composition), formule de Taylor-Young, développements usuels à connaître. Applications.

 **Attention** Les fonctions de trigonométrie hyperbolique ch et sh ne sont pas au programme de BCPST.

❖ Questions de cours.

- ✓ Énoncé de la caractérisation séquentielle de la limite, et montrer que $x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.
- ✓ Définition de la limite d'une fonction en un point a . Montrer que si une fonction f admet une limite en

un point a dans son ensemble de définition, alors cette limite vaut nécessairement $f(a)$ (Proposition 2.2).

- ✓ Construction de la fonction Arctan , formule de Arctan' et de son développement limité (avec justification). Énoncé de la formule générale donnant la dérivée d'une bijection réciproque.
- ✓  python™ Fonction résolvant de manière approchée l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie où f est une fonction continue.

2. Équations différentielles

- ① Équations différentielles linéaires d'ordre un : forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (variation de la constante et second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type


$$b(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t))$$

nous avons vu la méthode avec des exponentielles complexes. Les étudiants sont cependant libres d'utiliser leurs résultats de première année aussi.

- ② Équations différentielles linéaires d'ordre deux : forme des solutions de l'homogène, méthode de recherche d'une solution particulière (second membre particulier du type polynôme fois exponentielle lorsque les coefficients sont constants). Pour les seconds membres du type

$$b(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t))$$

nous avons vu la méthode avec des exponentielles complexes. Les étudiants sont cependant libres d'utiliser leurs résultats de première année aussi.

 **Attention** la méthode de variation des constantes n'est pas au programme.

- ③ Dynamique des populations.
- ④ Méthode d'Euler : présentation de la méthode et premier exemple (approximation de l'exponentielle).


❖ Questions de cours.

- ✓ Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en fonction de l'ensemble des solutions homogènes et d'une solution particulière (avec preuve). Forme de l'ensemble des solutions de l'homogène et recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est du type $t \mapsto P(t)e^{mt}$ avec $P \in \mathbf{K}[X]$ et $m \in \mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}).
- ✓ Présentation de la méthode d'Euler pour une équation différentielle du type $y'(t) = f(t, y(t))$ où $f : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, avec $I = [0, R]$, $R > 0$ un segment. Application à une équation différentielle simple. Nous n'avons pas encore pratiqué en TP, seulement le principe doit être connu pour le moment et pas son implémentation informatique.

3. Algorithmique

Premier TP d'informatique de révisions.

❖ Questions de cours.

- ✓  python™ Fonction qui calcule les factorielles d'un entier. Fonction qui renvoie si une liste L contient l'élément x , ainsi que la première position de x dans cette liste, sans utiliser l'instruction `in`.

*Au programme de la semaine prochaine : on ajoutera
les fonctions de plusieurs variables.*