D.S. de Mathématiques # 1

Le samedi 22/09/2018. Durée : 3 heures 30.

Lycée
Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ *proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.*

Une copie par exercice/problème.

Exercice 1 – **Probabilités**

□ **1—** Soient $x \in \mathbf{R}$ et φ_x la fonction qui à tout réel t associe $\varphi_x(t) = \max(x, t)$.

- **1.1.** Donner une représentation graphique de φ_x.
- **1.2.** Calculer $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. *On pourra distinguer plusieurs cas pour x.*
- **1.3.** Donner une représentation graphique de Φ.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ et on admet que l'on définit une variable aléatoire Y sur le même espace probabilisé, par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathrm{Y}(\omega) = \int_0^1 \max(\mathrm{X}(\omega), t)\,\mathrm{d}t$$

□ **2—** Dans cette question, X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

- **2.1.** Donner $\mathrm{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathrm{X}=k])$ où $k \in \mathrm{X}(\Omega)$, l'espérance et la variance de X.
- **2.2.** Déterminer $\mathrm{Y}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

□ **3—** Dans cette question, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

- **3.1.** Donner $\mathrm{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathrm{X}=k])$ où $k \in \mathrm{X}(\Omega)$, l'espérance et la variance de X.
- **3.2.** Déterminer $\mathrm{Y}(\Omega)$ et déterminer la loi de probabilité de Y.

□ **4—** On suppose dans cette question que $\mathrm{X}(\Omega) = \{-1, 0, 1/2, 2\}$ et que :

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}=-1) = \mathbf{P}(\mathrm{X}=0) = \frac{1}{8}, \qquad \mathbf{P}(\mathrm{X}=2) = \frac{1}{3}.$$

- **4.1.** Calculer la valeur de $\mathbf{P}(\mathrm{X}=1/2)$.
- **4.2.** Déterminer $\mathrm{Y}(\Omega)$ et déterminer la loi de probabilité de Y puis calculer son espérance $\mathbf{E}(\mathrm{Y})$.
- **4.3.** On note Z la variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé par $\mathrm{Z} = \mathrm{XY}$.

Justifier que $\mathrm{Z}(\Omega) = \{-1/2, 0, 5/16, 4\}$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

- **4.4.** Calculer le coefficient de corrélation $\rho(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ des deux variables aléatoires X et Y.

SOLUTION de l'Exercice 1.

□ **1—**

- **1.1.** Le graphe de φ_x ets constitué d'une ligne horizontale d'ordonnée x jusqu'au point d'abscisse x puis coïncide avec la première bissectrice.
- **1.2.** On distingue les cas
  - Si $x \le 0$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
  - Si $x \in]0,1[$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x x\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1+x^2}{2}$.
  - Si $x > 1$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}t = x$
- **1.3.**

□ **2—**

- **2.1.** Si X suit une loi géométrique de paramètre p, alors $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\mathbf{P}(\mathrm{X}=k) = p(1-p)^{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$ et $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbf{Var}(\mathrm{X}) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
- **2.2.** En particulier, $\forall \omega \in \Omega,\ \mathrm{X}(\omega) \ge 1$ et donc

$$\mathrm{Y}(\omega) = \Phi(\mathrm{X}(\omega)) = \mathrm{X}(\omega).$$

Les variables X et Y sont donc égales.

□ **3—**

■ **3.1.** On a $X(\Omega) = [|0, n|]$ et

$$\forall k \in [|0, n|],\ \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus,

$$\mathbf{E}(X) = np \text{ et } \mathbf{Var}(X) = np(1-p)$$

■ **3.2.** Comme $Y = \Phi(X)$, on a

$$Y(\Omega) = \Phi([|0, n|]) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, \dots, n\right\}$$

De plus

$$\mathbf{P}(Y = 1/2) = \mathbf{P}(X = 0) = (1-p)^n \text{ et } \forall k \in [|1, n|],\ \mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

□ **4—**

■ **4.1.** On a

$$\mathbf{P}(X = 1/2) = 1 - \mathbf{P}(X = -1) - \mathbf{P}(X = 0) - \mathbf{P}(X = 2) = \frac{5}{12}$$

■ **4.2.** On a $Y(\Omega) = \{\Phi(-1), \Phi(0), \Phi(1/2), \Phi(2)\} = \{1/2, 5/8, 2\}$ et

$$\mathbf{P}(Y = 1/2) = \mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}(Y = 5/8) = \mathbf{P}(X = 1/2) = \frac{5}{12}$$

$$\mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{5}{12}\frac{5}{8} + \frac{1}{3}2 = \frac{101}{96}$$

■ **4.3.** Quand X vaut -1, Y vaut $1/2$ et Z vaut $-1/2$. On procède de même pour les trois autres valeurs et on trouve

$$Z(\Omega) = \{-1/2, 0, 5/16, 4\}$$

$$\mathbf{P}(Z = -1/2) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbf{P}(Z = 0) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbf{P}(Z = 5/16) = \mathbf{P}(X = 1/2) = \frac{5}{12}$$

$$\mathbf{P}(Z = 4) = \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$$

■ **4.4.** Par formule de König-Huygens, on a

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Z) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

On a vu que $\mathbf{E}(Y) = 101/96$ et de même on a $\mathbf{E}(X) = 3/4$ et $\mathbf{E}(Z) = 269/192$. Ainsi

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{235}{384}$$

Pour obtenir le coefficient de corrélation, on doit diviser par le produit des écarts type. On a

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{399}{256} - \left(\frac{101}{96}\right)^2 = \frac{4163}{9216}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}} = \frac{235}{16652}\sqrt{4163}$$

Exercice 2 – Deux équations aux dérivées partielles

Les résolutions des deux équation aux dérivées partielles ci-dessous indépendantes.

□ **1—** Déterminer les fonctions $G : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2,\quad \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = 0, \text{ et}$$

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2,\quad \frac{\partial^2 G}{\partial u\, \partial v}(u, v) = 0.$$

□ **2—** On notera dans la suite par $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, t) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+t}{2}, \dfrac{x-t}{2}\right) \end{array} \right.$.

Montrer que l'application φ réalise une bijection de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

□ **3—** On définit une fonction $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ par $F(\varphi(x, t)) = f(x, t)$. À l'aide la question précédente, justifier l'existence de F.

□ **4—** Calculer les dérivées partielles de f notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial x}(\varphi(x, t))$

et $\dfrac{\partial F}{\partial t}(\varphi(x,t))$ de F. En déduire les solutions F de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0.$$

On souhaite résoudre dans $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ l'équation aux dérivées partielles suivante appelée *équation des ondes* :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0. \tag{E}$$

□ **5—** En déduire les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)$ de f en fonction de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\varphi(x,t))$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}(\varphi(x,t))$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial x}(\varphi(x,t))$.

□ **6—** Déduire des questions précédentes les solutions f de (E). *On remplacera les dérivées de f dans (E) par les expressions trouvées précédemment.*

PROBLÈME

Trigonométrie hyperbolique.

Dans cette partie, on étudie les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* respectivement notée ch et sh et définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

□ **1—** Étudier les variations de ch et sh sur $\mathbf{R}$. Dresser leur tableau de variations complets.

□ **2—** Déterminer les développements limités à l'ordre $n \in \mathbf{N}^\star$ de ch et sh au voisinage de zéro.

□ **3—** Montrer que sh définit une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Sa bijection réciproque est notée Argsh.

Montrer que Argsh est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

□ **4—**

- **4.1.** Démontrer que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
- **4.2.** En déduire que : $\forall y \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(y)) = \sqrt{y^2+1}$.
- **4.3.** Montrer que Argsh est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que : $\forall y \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Argsh}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}$.
- **4.4.** En déduire que Argsh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

□ **5—** Calculer la dérivée de $f : y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ sur $\mathbf{R}$.

En déduire que : $\forall y \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

□ **6—** Dans cette question, on souhaite retrouver l'expression précédente de Argsh par un calcul direct.

- **6.1.** Soit y un nombre réel fixé. Résoudre l'équation $y = \operatorname{sh}(x)$ en x. *On pourra essayer de faire apparaître une équation du second degré en e^x.*
- **6.2.** En déduire que : $\forall y \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

Étude d'un point fixe.

On définit dans cette partie une fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

□ **7—** Étudier la parité de f.

□ **8—** Montrer que f est continue en zéro.

□ **9—** Justifier que f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbf{R}^*$.

□ **10—** A l'aide d'un développement limité de f à l'ordre un, montrer que f est dérivable en zéro et déterminer $f'(0)$.

□ **11—** On pose pour $x \geq 0$, $h(x) = \operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)$. Étudier les variations de h et en déduire le signe de $h(x)$.

□ **12—** Étudier les variations de f sur $\mathbf{R}_+$ et donner l'allure de sa courbe représentative sur $\mathbf{R}$ tout entier.
□ **13—** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbf{R}$ et donner un encadrement de α. *on donne* $sh(0.8) \approx 0.89$ *et* $sh(1) \approx 1.18$.
□ **14—** python Écrire un programme `DichoPointfixef()` Python permettant de calculer et d'afficher une valeur approchée de α à 0.01 près par dichotomie.

Le problème de la chaînette.

La chaînette est le nom d'une courbe obtenue en tenant une corde à deux extrémités fixées A et B. On considère ici un fil flexible à l'équilibre fixé à deux extrémités A et B situées à la même hauteur.

On considère un repère orthonormé centré en O. Le repère est choisi tel que le point le plus bas de la chaînette soit le point S de coordonnées $(0; a)$ avec a un réel strictement positif, et par commodité, on suppose que les points d'accroche A et B sont d'abscisse respectives -1 et 1.
On considère la fonction f dont la courbe est la chaînette. Le but de cette partie est de trouver l'expression de la fonction f. Nous ferons les hypothèses suivantes :

❶ f est de classe C^∞ sur $[-1; 1]$ et strictement positive,

❷ $f(0) = a, \quad f'(0) = 0$.

□ **15—** Interpréter géométriquement les hypothèses $f(0) = a$ et $f'(0) = 0$.
□ **16—** On admet que des considérations physiques permettent de démontrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2}$. On pose alors $z = f'$ dans toute la suite.

- **16.1.** Écrire l'équation différentielle du premier ordre, notée (E) dans toute la suite, dont z est solution.
- **16.2.** Calculer la dérivée de $\operatorname{Argsh}(z)$ en fonction de z et z'.
- **16.3.** En déduire que : $\forall x \in [-1; 1], \quad z(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}\right)$.
- **16.4.** En déduire que : $\forall x \in [-1; 1], \quad f(x) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$.

□ **17—** On va retrouver l'expression de f d'une autre manière.

- **17.1.** En dérivant l'équation (E). Montrer que z est solution de l'équation différentielle (F) : $z'' = \frac{1}{a^2} z$.
- **17.2.** Résoudre cette équation différentielle et retrouver ainsi l'expression de f en prenant en compte des conditions initiales.

□ **18—** La courbe d'une chaînette ressemble à celle d'une fonction usuelle. Par quelle fonction usuelle pensez-vous pouvoir approcher la courbe de f ?

Méthode numérique

Dans la suite on considère que $a = 1$. On veut ici étudier une méthode d'approximation numérique des solutions de l'équation (E) : $z' = \sqrt{1 + z^2}, \quad z(0) = 0$ sur l'intervalle $[0; 1]$ à l'aide de la méthode d'Euler.

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. On pose, pour tout i entier compris entre 0 et N, $t_i = \frac{i}{N}$. On a ainsi construit une subdivision de l'intervalle $[0; 1]$ de pas $h = \frac{1}{N}$. Les approximations fournies par la méthode d'Euler seront notées z_i.

□ **19—** Prouver que pour tout $i \in [\![0; N-1]\!], \quad z_{i+1} = h\sqrt{1 + z_i^2} + z_i$.
□ **20—** Proposer une fonction en Python qui prend en argument N et qui renvoit une liste contenant les $N+1$ valeurs de z_i pour $i \in [\![0; N]\!]$.
□ **21—** À l'aide de la liste précédente proposer un tracé de courbe en Python sur l'intervalle $[0; 1]$ qui passe par les points $(t_i; z_i)$.