DEVOIR MAISON # 1
à rendre le Jeudi 12/09/2019

Consignes

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
Vous avez la possibilité de rendre un devoir pour deux, mais les écritures doivent alors apparaître en parts égales. Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.

Exercice 1 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 — Déterminer $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

2 — Étudier l'inversibilité de la matrice P et calculer $T = P^{-1}AP$.

3 — Exprimer A en fonction de T, P, P^{-1} puis A^n en fonction de T^n, P et P^{-1} pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4 — Calculer T^n pour tout entier $n \in \mathbf{N}$. *Indication : On pourra utiliser le binôme de Newton.*

5 — En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 2 Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$(n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0.$$

1 — Écrire un programme qui demande les valeurs de u_0 et u_1 et renvoie la valeur de u_{100}.

2 — Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. On admet que la dimension de E est finie égale à 2.

3 — Soit a et b les deux suites définies par : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = 1$ et $b_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$.
Montrer que (a, b) est une famille libre de E. En déduire une base de E

4 — Soit p un entier fixé et $F_p = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E,\ u_p = 0\}$. Montrer que F_p est un sous-espace vectoriel de E et donner une base.

■ **Exercice 3** Un échiquier est un plateau de 8 lignes et 8 colonnes. Ces lignes et ces colonnes seront, dans cet exercice, numérotées de 0 à 7. Une position de l'échiquier est un couple $[i, j]$ d'entiers compris entre 0 et 7 inclus, avec i le numéro de ligne et j le numéro de colonne.
Un cavalier placé sur l'échiquier se déplace en bougeant de 2 cases dans une direction (verticale ou horizontale) et de 1 case perpendiculairement. Si le cavalier est loin des bords de l'échiquier, il a 8 possibilités de déplacements, mais il en a moins s'il est près des bords.

1 — Illustrer sur un brouillon les deux cas énoncés précédemment.

2 — Écrire une fonction `valide` prenant en argument deux entiers relatifs i et j et vérifiant que le couple $[i, j]$ est bien une position de l'échiquier *i.e.*`valide` doit renvoyer un booléen.

3 — Écrire une fonction `coupsSuivants` prenant en argument une position $[i, j]$ et renvoyant la liste des positions que peut atteindre un cavalier placé en $[i, j]$ en un seul coup.

4 — Écrire une fonction `cavalier` prenant en argument une position $[a, b]$ et renvoyant un tableau T carré d'ordre 8 telle que $T[i, j]$ est le nombre minimum de coups nécessaires à un cavalier placé en position $[a, b]$ pour arriver à la position $[i, j]$. *Indication : On pourra commencer par voir l'échiquier comme une liste de de taille 64.*