D.M. de Mathématiques # 2

à rendre le Jeudi 13 Septembre 2018

Lycée Chaptal
BCPST2 A

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire. La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'´enoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
*Le devoir peut être fait à deux, les deux écritures doivent **impérativement** apparaître sur la copie et en parts égales.*
*On rappelle qu'il vaut mieux, **à titre exceptionnel**, ne pas rendre un devoir maison plutôt que de recopier une correction.*

Exercice 1

En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer :

$$\lim_{x\to\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

SOLUTION. Notons $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & xe^{\frac{1}{x}}\end{array}\right.$. Soit alors $x>0$.
La fonction f est continue sur $[x\,;x+1]$, et dérivable sur $]x\,;x+1[$, il existe donc $c_x\in]x\,;x+1[$ tel que :

$$f(x+1)-f(x)=f'(c_x)(x+1-x).$$

Or, pour tout $x>0$, $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-xe^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^2}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$. On cherche les variations de f' pour connaître un encadrement.
Pour cela, on calcule $f''(x)$ pour tout $x>0$. On trouve : $f''(x)=\dfrac{e^{1/x}}{x^3}>0$ pour tout $x>0$.
Ainsi la fonction f' est croissante, et on peut encadrer $f'(c_x)$ de la manière suivante :

$$f'(x)=\inf_{y\in]x\,;x+1[}f'(y)\leqslant f'(c_x)\leqslant\sup_{y\in]x\,;x+1[}f'(y)=f'(x+1),$$

d'où :

$$e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\leqslant f(x+1)-f(x)\leqslant f'(x+1)=e^{\frac{1}{x+1}}\left(1-\frac{1}{x+1}\right).$$

Les exponentielles convergent vers zéro lorsque $x\longrightarrow\infty$. D'où : $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}\right)=1}$.

Exercice 2

□ **1—** Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On suppose que $f\circ f=\dfrac{\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}}{4}+1\quad(\star)$.

- **1.1.** Montrer que pour tout $x\in\mathbf{R}$, $\quad f'(x)=f'\left(\dfrac{x}{4}+1\right)$.
- **1.2.** En déduire que pour tout $x\in\mathbf{R}$ et $n\in\mathbf{N}^\star$: $\quad f'(x)=f'\left(\dfrac{x}{4^n}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{4^k}\right)$.
- **1.3.** En déduire que f' est constante sur $\mathbf{R}$.

□ **2—** En déduire toutes les fonctions dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ vérifiant $(\star)$.

SOLUTION.
□ **1—**
- **1.1.** Dérivant la relation $f\circ f=\dfrac{\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}}{4}+1$, on obtient : $f'(f(x))f'(x)=\dfrac{1}{4}$ pour tout $x\in\mathbf{R}$ d'après la formule de dérivation des fonctions composées.

Mais d'autre part, composant $(\star)$ par f' on obtient aussi : $f'\left(\dfrac{x}{4}+1\right)=f'(f(f(x)))=\dfrac{1}{4f'(f(x))}$ d'après le calcul précédent. Remarquons que cette formule est parfaitement définie puisque $f'(f(x))f'(x)=\dfrac{1}{4}$ implique en particulier que f' ne s'annule jamais.
On obtient alors : $f'\left(\dfrac{x}{4}+1\right)=\dfrac{f'(x)}{4f\circ f'(x)}=f'(x)$ en utilisant la relation $(\star)$.
- **1.2.** Itérer la relation précédente. Pour une rédaction propre, faire une récurrence.
- **1.3.** Puisque f est dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, la fonction f' est continue. On a donc :

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'\left(\frac{x}{4^n}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^k}\right)=f'\left(0+\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$. La fonction f' est donc constante.

□ **2—** Déduisons toutes les fonctions dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ vérifiant $(\star)$.
Si f est une solution alors $f'=\mathrm{K}$ pour $\mathrm{K}\in\mathbf{R}$. Donc $f(x)=\mathrm{L}+\mathrm{K}x$ pour tout $x\in\mathbf{R}$, avec $(\mathrm{K},\mathrm{L})\in\mathbf{R}^2$.
Inversement, injectons la fonction $x\longmapsto\mathrm{L}+\mathrm{K}x$ dans $(\star)$. On trouve $f(\mathrm{L}+\mathrm{K}x)=\dfrac{x}{4}+1=\mathrm{L}+\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K}x)=\mathrm{L}(1+\mathrm{K})+\mathrm{K}^2x$. Finalement, nécessairement

$K^2 = \frac{1}{4}$ et $L(1+K) = 1$. Soit $K = \pm\frac{1}{2}$ et $L = \frac{2}{3}$ ou $L = 2$.
On obtient comme solutions les fonctions $x \longmapsto \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x$ et $x \longmapsto 2 - \frac{1}{2}x$.

PROBLÈME

On appelle *corde universelle* tout réel $\ell \in]0,1]$ pour lequel il existe une corde horizontale de longueur ℓ pour la courbe représentative de toute fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. L'existence d'une telle corde équivaut à l'existence d'un réel $x \in [0, 1-\ell]$ tel que $f(x) = f(x+\ell)$ pour toute fonction continue.
L'objectif de cet exercice est de déterminer quelles sont les cordes universelles.

□ **1—** On suppose que $\ell = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$.

■ **1.1.** On forme une nouvelle fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0, 1-\ell] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x+\ell) - f(x) \end{array} \right. .$$

Calculer la quantité

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right).$$

■ **1.2.** En déduire que la courbe représentative de f admet une corde horizontale de longueur ℓ, puis que ℓ est une corde universelle.

□ **2—** Soit $\ell \in]0,1]$ tel que $\frac{1}{\ell} \notin \mathbf{N}^*$. On définit :

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{\sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\ell}\right)} \right)^2 \end{array} \right. .$$

■ **2.1.** Montrer que $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie, continue. Étudier sa périodicité et calculer $h(0), h(1)$.

■ **2.2.** En considérant la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & h(x) - x \end{array} \right.$$

montrer que ℓ n'est pas une corde universelle.

□ **3—** Conclure.

SOLUTION.

□ **1—**

■ **1.1.** Comme $\ell = \frac{1}{n}$, on a :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right].$$

Il apparaît un télescopage :

$$S = f\left(\frac{n}{n}\right) - f(0)$$

d'où :

$$\boxed{S = 0}.$$

■ **1.2.** La somme S est une somme nulle de réels. Il n'est pas possible que tous ces réels soient strictement positifs ou tous strictement négatifs. Ainsi, Il existe au moins un terme positif $g(a)$ et un terme négatif $g(b)$. La fonction g étant continue sur l'intervalle d'extrémités a et b, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule en un réel $c \in [0, 1-\ell]$. Or $g(c) = 0$ signifie que $f(c) = f(c+\ell)$, donc le graphe de $\boxed{f \text{ admet une corde horizontale de longueur } \ell}$. Ainsi, par définition, $\boxed{\ell \text{ est une corde universelle}}$.

□ **2—**

■ **2.1.** La fonction $\boxed{h \text{ est continue et } h(0) = 0,\ h(1) = 1}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\sin\left(\pi\frac{x+\ell}{\ell}\right) = \sin\left(\pi\frac{x}{\ell} + \pi\right) = -\sin\left(\pi\frac{x}{\ell}\right)$$

donc :

$$h(x+\ell) = \left(\frac{\sin\left(\pi\frac{x+\ell}{\ell}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\ell}\right)} \right)^2 = \left(\frac{-\sin\left(\pi\frac{x}{\ell}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\ell}\right)} \right)^2 = h(x).$$

Ainsi, $\boxed{h \text{ est } \ell\text{–périodique}}$.

■ **2.2.** Pour la fonction f définie dans l'énoncé, on a, par ℓ–périodicité de h :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in [0, 1-\ell],\ f(x+\ell) & = & h(x+\ell) - (x+\ell) \\ & = & h(x) - x - \ell \\ & = & f(x) - \ell \\ & \neq & f(x). \end{array}$$

Ainsi, f n'admet pas de corde horizontale de longueur ℓ. Or, f est bien une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Ainsi, $\boxed{\ell \text{ n'est pas une corde universelle}}$.

□ **3—** Le réel $\boxed{\ell \in]0, 1] \text{ est une corde universelle si et seulement si } \frac{1}{\ell} \in \mathbf{N}^*}$.