Sommaire

Algèbre

Analyse

Aléatoire

Sommaire

Quelques remarques à propos de l'utilisation de ce polycopié

❶ Les énoncés et faits hors-programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve.

❷ Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, mais qui peuvent être lues en seconde lecture, ou en première pour les plus à l'aise.

❸ Quelques éléments [1] relatifs à l'application informatique des Mathématiques (simulations, calculs matriciels, approximations d'intégrales ou de solutions d'équations différentielles, *etc.*) seront indiqués par le logo ≻_ .

❹ En revanche, l'Informatique (Algorithmique notamment) fera l'objet d'un polycopié séparé.

❺ Une marge conséquente est présente à droite du polycopié : utilisez-là pour prendre des notes !

1. Tous les détails sont à retrouver dans le polycopié d'Info

Première partie

Algèbre

CHAPITRE I.1

Espaces Vectoriels

Résumé/Plan

(Ceci est une marge que vous devez utiliser pour la prise de notes)

Beaucoup de notions ci-dessous ont déjà été exposées en première année pour l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Le but est ici de généraliser à un espace quelconque, que nous appellerons *espace vectoriel*. C'est un ensemble muni de deux lois vérifiant certaines propriétés. Nous verrons que cet objet est une abstraction de beaucoup de choses que vous connaissez déjà : l'ensemble des polynômes, les espaces de fonctions continues (ou dérivables, ...), les espaces de suites, et beaucoup d'autres choses. Nous commencerons par la définition d'espace et de sous-espace vectoriel, ensuite les bases qui généralisent la notion de repère linéaire que vous connaissez en géométrie depuis le collège, et enfin la notion de dimension.
Nous allons considérer pour terminer des applications entre les espaces vectoriels, qui seront des applications entre les deux ensembles sous-jacents et vérifiant une propriété *ad hoc* dite de *linéarité*. Ces applications seront aussi des applications en tant qu'ensembles : il est donc important de revoir le chapitre de première année traitant du sujet (notion d'injectivité, surjectivité, bijectivité, d'application réciproque *etc.*).

Notation | *Symbole de Kronecker*

Soient x, y deux éléments d'un ensemble E, alors le *symbole de Kronecker de* x, y est défini par :

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tout le chapitre, l'ensemble **K** désignera **R** ou **C**.

Intérêt des raisonnements algébriques Ce chapitre s'inscrit dans le domaine de l'*algèbre* en Mathématiques, dont la vocation principale est l'étude d'ensembles munis de lois, et de dégager un cadre commun à plusieurs objets mathématiques. Une fois ce cadré dégagé (voir la Définition 2 ci-dessous) nous l'étudierons en détail avec les seuls axiomes de la Définition 2 supposés. Tous les résultats établis dans cette étude se transmettront donc automatiquement aux objets qui vérifient la Définition 2.

On résume ainsi l'idée : **on ne souhaite pas se donner le même travail plusieurs fois !**

Comment mémoriser facilement les définitions ? Gardez à l'esprit que toutes les notions qui vont être présentées, quoique abstraites à première vue, sont des généralisations de quelque chose de concret que vous connaissez déjà. Ainsi l'essence des définitions sera *de facto* beaucoup plus évidente à assimiler.

Définition 1 | *Structure algébrique*

On appelle *structure algébrique* tout ensemble muni d'opérations (appelées aussi *lois*) sur celui-ci.

Exemple 1 — L'ensemble des rationnels muni de son addition $(\mathbf{Q}, +)$, l'ensemble des réels munis de son addition $(\mathbf{R}, +)$ …

1 Structure d'espace vectoriel

Exemple 2 — ***Cas de* R *ou* C** Considérons un premier exemple, celui des ensembles **R** ou **C**. Nous pouvons additionner, grace à la loi + classique, deux réels ou deux complexes. Nous pouvons aussi :

1. multiplier tout complexe par un réel, *i.e.*on définit une loi $\cdot \left| \begin{array}{ccc} \boxed{\mathbf{R}} \times \mathbf{C}, & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (\lambda, z) & \longmapsto & \lambda z. \end{array} \right.$ Un tel ensemble muni de lois, ici **C** muni de $+$ et $\cdot$, sera noté $(\mathbf{C}, +, \cdot)$, et nous dirons que $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ est un $\boxed{\mathbf{R}}$-*espace vectoriel* puisque . multiplie uniquement les complexes par des éléments de **R**.
2. On pourrait aussi utiliser les lois suivantes sur **C** : conserver la loi $+$ précédente, mais utiliser $\cdot \left| \begin{array}{ccc} \boxed{\mathbf{C}} \times \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (\lambda, z) & \longmapsto & \lambda z \end{array} \right.$ comme multiplication. Avec ce choix on dira que $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ a une structure de $\boxed{\mathbf{C}}$-*espace vectoriel.*

Exemple 3 — ***Cas de*** $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ Considérons un second exemple, celui de l'ensemble des fonctions de **R** dans **R** noté $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Nous pouvons additionner, grace à la loi + classique des fonctions f, g, on définit alors une fonction $f + g : x \longmapsto (f + g)(x)$. Nous pouvons aussi multiplier toute fonction par un réel, *i.e.*on définit une loi $\cdot \left| \begin{array}{ccc} \boxed{\mathbf{R}} \times \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}), & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda f. \end{array} \right.$ On définit alors un triplet $(\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}),+,\cdot)$ qui va porter lui aussi le nom d' $\boxed{\mathbf{R}}$ - espace vectoriel.

Fixons déjà le vocabulaire dans ces exemples : l'opération $+$ sera appelée opération *interne* sur E (exemple : lorsque l'on additionne dans $\mathbf{C}$ deux complexes, on obtient un nombre complexe), l'ensemble $\boxed{\mathbf{C}}$ (ou $\boxed{\mathbf{R}}$ dans ➊) sera appelé *corps de base*.

1.1 Généralités

Définition 2 | *Groupe commutatif & espace vectoriel*

On appelle $\mathbf{K}$-*espace vectoriel* (ou *espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$) tout triplet $(\mathrm{E},+,\cdot)$ où :

➊ $(\mathrm{E},+)$ est un *groupe commutatif i.e.* :

- ***(i)*** $+$ est une *loi interne* :
$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right. .$$
- ***(ii)*** $+$ est *associative* : $\forall x,y,z \in \mathrm{E}, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$,
- ***(iii)*** *existence d'un élément neutre* 0_E *pour* $+$ *:* $\forall x \in \mathrm{E}, \quad x+0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E}+x$,
- ***(iv)*** tout élément de E est inversible pour $+$: $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \exists y \in \mathrm{E}, \quad x+y = y+x = 0_\mathrm{E}$. L'élément y inverse de x sera noté $-x$.
- ***(v)*** la loi $+$ est *commutative*, *i.e.* $\forall x,y \in \mathrm{E}, \quad x+y = y+x$.

➋ La loi $\cdot$ est une *loi de externe*
$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array} \right.$$
telle que pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$ et tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ on ait les *règles de calcul suivantes* entre $+$ et $\cdot$:

- ***(i)*** $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$,
- ***(ii)*** $\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$,
- ***(iii)*** $(\lambda\times\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$,
- ***(iv)*** $1\cdot x = x$.

Les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés les *scalaires*, les éléments de E sont les *vecteurs*, $\mathbf{K}$ est le *corps de base*, la loi $+$ est appelée *addition* et la loi $\cdot$ est appelée *multiplication par un scalaire*. L'élément neutre de E pour la loi $+$ est appelé *vecteur nul*, et on le notera toujours 0_E comme précédemment.

On impose toutes ces propriétés calculatoires pour des raisons techniques, retenez que, sans elles, beaucoup d'opérations de la suite du cours ne seraient plus possibles, et des théorèmes deviendraient alors tout simplement faux.

⚠ Attention

Première erreur à bannir dès maintenant : vous pouvez multiplier les vecteurs $x \in \mathrm{E}$ par des **scalaires** $\lambda \in \mathbf{K}$, **mais pas** multiplier deux vecteurs $x, y \in \mathrm{E}$ entre eux généralement. [4]

■ **Remarque 1.1 —** Avant de considérer quelques premiers exemples, réfléchissons sur la définition. De manière générale, une structure algébrique est la donnée d'un ensemble et d'opérations sur cet en-

4. Même si dans cerrains espaces vectoriels c'est possible, par exemple il est possible de multiplier deux polynômes entre eux.

semble.
La structure la plus pauvre est le *magma associatif*, *i.e.*un ensemble E, muni d'une opération interne associative $+$, on note $(\mathrm{E},+)$. Les autres structures proviennent simplement d'un « enrichissement » (ajout de lois ou d'axiomes) de la structure de magma :

❶ $(\mathrm{E},+)$ est un groupe si l'on exige en plus que tout élément possède un inverse et qu'il existe un élément neutre pour $+$. On dit qu'il est commutatif simplement si en plus l'assertion **(v)** est vérifiée.

❷ Pour la structure espace vectoriel, on ajoute une nouvelle loi $\cdot$, dite externe puisqu'elle ne prend pas deux éléments de E en argument mais un élément de $\mathbf{K}$ et un élément de E, on note la structure $(\mathrm{E},+,\cdot)$.

❸ Il en existe bien d'autres : celle d'anneau $(\mathrm{A},+,\times)$ (deux lois internes au lieu d'une externe), celle d'algèbre où l'on ajoute encore une loi à celles d'espace vectoriel, mais là on sort très largement des programmes de BCPST.

Attention

D'où un réflexe à prendre dès maintenant : se demander quels objets vous manipulez (des fonctions ? des nombres réels ? des complexes ? des polynômes ? des suites ?), et comment vous pouvez les manipuler, *i.e.*avec quelles lois (on peut les additionner ? les multiplier par quels scalaires ?). [5]

Donnons sans plus tarder quelques exemples d'espaces vectoriels.

Exemple 4 —

❶ *En géométrie euclidienne* – $(\mathbf{R}^2,+,\cdot)$ est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel de la géométrie plane (ses éléments sont les « vecteurs » du plan). La loi de composition externe est donnée par :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (\lambda,(x,y)) & \longmapsto & (\lambda x,\lambda y) \end{array}\right. .$$

De même, $(\mathbf{R}^3,+,\cdot)$ est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel de la géométrie de l'espace.
Soit maintenant $p \geqslant 1$ un entier. Précisez les lois internes et externes pour faire de $(\mathbf{R}^p,+,\cdot)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel (de-même on pourrait faire de-même pour $\mathbf{C}^p$ avec $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) :

Ceci sera en fait un cas particulier de la Proposition 1 ci-après.

5. Même si ces lois seront très souvent notées $+, .$ de manière très générique, le $+$ des réels n'est pas le $+$ des fonctions, par exemple !

❷ Les ensembles de matrices sont des espaces vectoriels, nous reverrons cela dans le Chapitre I.2.

❸ L'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, mais pour quelles lois ?

❹ L'ensemble $\mathbf{K}^{\mathbf{N}} = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$ indexées par $\mathbf{N}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, mais pour quelles lois ?

❺ L'ensemble $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Préciser les lois.

❻ *Restriction à un sous-ensemble de* **K**– Tout **C**-espace vectoriel est *a fortiori* un **R**-espace vectoriel (comme par exemple : **C**, **C**[X], *etc*).

En effet, si E *un* **C**-*espace vectoriel. Il suffit de restreindre la loi externe*

$$\cdot : \mathbf{C} \times E \longrightarrow E, \quad \textit{à} \quad \cdot|_{\mathbf{R}\times\mathbf{C}} : \mathbf{R} \times E \longrightarrow E,$$

et on vérifie ensuite facilement que cette restriction définit une **R**-*loi externe sur* E.

■ **Remarque 1.2 —** Le seul espace vectoriel réduit à un singleton *i.e.* $(\{x_0\}, +, \cdot)$ ne peut être que $(\{0_E\}, +, \cdot)$. Pourquoi ?

Produit cartésien d'espaces vectoriels.

Proposition 1 | *Produit cartésien*

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des **K**-espaces vectoriels. On munit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ de deux lois $+$ et . de la manière suivante :

❶ ***(Addition coordonnée par coordonnée)***

$$+ \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ ((x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \end{array} \right. .$$

❷ ***(Multiplication coordonnée par coordonnée par un scalaire)***

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, (y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & (\lambda.y_1, \ldots, \lambda.y_n) \end{array} \right. .$$

Alors :

$$(E_1 \times \ldots \times E_n, +, .) \text{ est un } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel, avec pour élément neutre} \quad 0_{E_1 \times \ldots \times E_n} = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n}).$$

Preuve

Vérifions par exemple les axiômes de ❶.

Espaces fonctionnels.

Proposition 2 | *Espaces de fonctions*

Soient F un ensemble non vide et $\boxed{\mathrm{E}}$ un **K**-espace vectoriel. L'ensemble $\boxed{\mathrm{E}}^{\mathrm{F}}$ des fonctions de F dans E, muni des lois :

❶ $\forall (f,g) \in (\mathcal{F}(\mathrm{F},\mathrm{E}))^2, \quad (f+g) \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.,$

❷ $\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall f \in \mathcal{F}(\mathrm{F},\mathrm{E}), \quad (\lambda \cdot f) \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array} \right.$

est un **K**-espace vectoriel. Son élément neutre est donc $0_{\mathcal{F}(\mathrm{F},\mathrm{E})}$, *i.e.*la fonction nulle $\left| \begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & 0_{\mathrm{E}} \end{array} \right.$.

On additionne simplement « x par x », de-même pour la multiplication.

Preuve

Vérifier les différents axiomes.

Remarque 1.3 — Il faut bien comprendre que dans la Proposition 2, il est nécessaire que **l'espace d'arrivée** soit un espace vectoriel pour donner un sens à $f(x)+g(x)$, $\lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{F}$, $(f,g) \in \mathcal{F}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. En revanche, on voit bien que ce n'est pas indispensable pour l'espace de départ.

Exemple 5 — Soit I un intervalle non trivial de **R**. L'ensemble $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ est muni d'une structure de **R**-espace vectoriel. C'est un cas particulier de la Proposition 2 puisque **R** possède une structure de **R**-espace vectoriel.

Règles de calculs secondaires.

Proposition 3 | *Autres règles de calcul dans un K-espace vectoriel*

Soit E un **K**-espace vectoriel. Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$ et tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, on a :

❶ ***(Développement d'une expression)*** $\quad (\lambda-\mu)\cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x, \quad \lambda \cdot (x-y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y,$

❷ ***(Multiplication par zéro)*** $\quad 0_{\mathbf{K}} \cdot x = 0_{\mathrm{E}}, \quad \lambda \cdot 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}},$

❸ ***(Multiplication par l'opposé)*** $\quad (-\lambda)\cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x),$

❹ ***(Produit nul)*** $\quad \lambda \cdot x = 0_{\mathrm{E}} \iff (\lambda = 0_{\mathbf{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_{\mathrm{E}}).$

Remarque 1.4 — La dernière assertion n'a *a priori* rien d'évident, d'ailleurs elle est même fausse pour d'autres ensembles que $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou **C**, mais dans notre cadre (*c.f.*début de chapitre) ce sera toujours le cas.

Preuve

Par exemple, pour ❹ :

- si $\lambda \neq 0_{\mathbf{K}}$, *alors on peut multiplier par $\frac{1}{\lambda}$ à gauche :* $\frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$ *d'où* $\quad x = 0_{\mathrm{E}}$,
- sinon $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$.

Maintenant que le cadre est posé, regardons ce que l'on peut faire avec les vecteurs, *i.e.*les éléments d'un espace vectoriel. En combinant les deux lois définies plus haut (additive et scalaire-multiplicative), on arrive directement à la notion de combinaison linéaire.

1.2 Combinaisons linéaires & Sous-espaces vectoriels

Définition 3 | *Combinaison linéaire de vecteurs*

Soit E un **K**-espace vectoriel.

➊ ***(Pour une famille finie de vecteurs)*** Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs x_1, ..., x_n tout vecteur $x \in$ E s'écrivant sous la forme $x = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\lambda_k} x_k$ où pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, on a $\lambda_k \in \boxed{\mathbf{K}}$. L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ est noté $\mathrm{Vect}_{\boxed{\mathbf{K}}}(x_1, \dots, x_n)$, *i.e.*

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \right\}.$$

➋ ***(Pour une famille quelconque de vecteurs)*** Soit $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de E indexée par un ensemble I quelconque. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ toute combinaison linéaire **finie** des x_i avec $i \in$ I. L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est noté $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

■ **Remarque 1.5 — À propos de K** Dans la suite nous noterons **K** en indice uniquement lorsque le contexte l'impose. Sous les notations précédentes (en ➊ par exemple), supposons que E est un **R**-espace vectoriel **et** un **C**-espace vectoriel. A-t-on une inclusion entre les deux ensembles ci-dessous ? Et pourquoi ?

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(x_1, \dots, x_n) \qquad \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(x_1, \dots, x_n).$$

■

Méthode | *Montrer l'appartenance « à un* Vect »

Sous les mêmes notations que précédemment, pour montrer que $x \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$, on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires, tels que : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

■ **Exemple 6 —** Est-ce que le vecteur $u = (3, 3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $a = (1, 1)$, $b = (1, 0)$ et $c = (0, 1)$? Y a-t-il unicité de l'écriture de u comme combinaison linéaire de a, b et c ? ■

■ **Exemple 7 —** Le vecteur $u = (-1, 2, 2)$ de $\mathbf{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $a = (1, 1, 0)$, $b = (-2, 1, 3)$ et $c = (1, 0, -1)$? ■

Attention | *Identification*

On retiendra qu'*a priori* on ne peut pas identifier de manière systématique [11] :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k\right) \quad \not\Longrightarrow \quad (\forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k)\,.$$

Exemple 8 — ***Polynômes*** Toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n est combinaison linéaire de 1, X, X^2, ..., X^n, puisqu'il peut être écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où les a_k sont dans $\mathbf{K}$. On peut donc résumer cela en :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(1, X, \dots, X^n) = \mathbf{K}_n[X].$$

Sous-espaces vectoriels.

Définition 4 | *sous-espace vectoriel*

On appelle *sous-espace vectoriel* d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E tout ensemble F tel que :

1. $F \subset E$,
2. $0_E \in F$,
3. F est *stable par combinaison linéaire :* $\quad \forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad \forall(x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Proposition 4

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.
Alors : $\left(F,\ +|_{F\times F},\ .|_{\mathbf{K}\times F}\right)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Preuve

Simple vérification des axiômes de la Définition 2.

Remarque 1.6 — Économie de rédaction L'énorme intérêt de la notion de sous-espace vectoriel réside dans la proposition précédente : une économie dans la rédaction. En effet, il nous suffira de vérifier qu'une structure est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel du cours (fait que vous avez le droit d'utiliser sans argument supplémentaire), pour justifier la structure espace vectoriel. Ce qui semble beaucoup plus rapide que la vérification de la Définition 2.

Exemple 9 — ***dans*** $\mathbf{R}^n$.

1. Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E admet toujours comme sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E lui-même.
2. L'ensemble $\{\lambda(2, 3) = (2\lambda, 3\lambda) \in \mathbf{R}^2, \lambda \in \mathbf{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ appelé *droite vectorielle de vecteur directeur* $(2, 3)$. [14]

11. Nous appellerons plus tard *famille libre* toute famille où c'est le cas.
14. Mais la Définition/Proposition 1 généralise cela.

❸ L'ensemble $\{\lambda(1,2,0) = (\lambda, 2\lambda, 0) \in \mathbf{R}^3,\ \ \lambda \in \mathbf{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ appelé *droite vectorielle de vecteur directeur* $(1,2,0)$.

❹ L'ensemble $\{\lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1) = (\lambda+\mu, 2\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^3,\ \ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ appelé *plan vectoriel de vecteurs directeurs* $(1,2,0)$ et $(1,0,1)$.

❺ L'ensemble
$$\mathrm{F} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{K}^4,\ \ x+y+z+t = 0 \text{ et } x-y=0\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^4$.

■

■ **Exemple 10 — *Sous-espaces de fonctions.***

❶ Soient I un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. L'ensemble $\mathcal{C}^n(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ des fonctions $\mathcal{C}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$.

❷ L'ensemble $\left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ \ \forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = 3f(x)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Que reconnaît-on ?

❸ L'ensemble $\left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R}),\ \forall x \in \mathbf{R}_+^*,\quad f'(x) = 3f(x)^2\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$?
Indication : *Commencer par trouver une fonction non nulle dans cette ensemble.*

❹ L'ensemble des solutions d'une équation différentielle **linéaire homogène** sur un intervalle I (du premier ou du second ordre) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbf{K})$ [15]. Nous le montrerons dans le Chapitre II.2 de révisions.

❺ L'ensemble des solutions d'un système **linéaire homogène** à coefficients dans $\mathbf{K}$ et à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$. Nous le montrerons dans le Chapitre I.2 de révisions.

❻ Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

■ **Exemple 11 —** ***Sous-espaces de suites.***

❶ Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. L'ensemble $\mathrm{E} = \{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

15. Ceci généralise donc l'exemple précédent

❷ L'ensemble $\left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ u_n \underset{n\to\infty}{=} o(1)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Peut-on remplacer $(1)_n$ par une autre suite ?

❸ L'ensemble des suites vérifiant une **relation de récurrence linéaire** est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Nous le montrerons dans le Chapitre II.3.

Définition/Proposition 1 | *Un* « Vect » *est un espace vectoriel/Définition d'une droite vectorielle*

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par un ensemble I.
Alors : Vect $(x_i)_{i\in I}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $(x_i)_{i\in I}$.
Lorsque la famille est réduite à un unique vecteur $u \in E$, on appelle Vect(u) *la droite vectorielle* engendrée par u.

Méthode | *Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel*

❶ ***(1ère possibilité)*** Justifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence (un espace de vecteurs, de polynômes, de fonctions, de suites ...).

❷ Montrer que l'ensemble s'écrit comme Vect d'une famille.

Preuve

Faisons la preuve dans le cas $I = [\![1\,,\,n]\!]$, *i.e.*le cas où $(x_i)_{i\in I} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Intersection & Réunion d'espaces vectoriels.

Proposition 5

Soit E un **K**-espace vectoriel.

❶ Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.

❷ Une réunion de sous-espaces vectoriels de E **n'est en général pas** un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

❶ Considérons, pour simplifier la rédaction, une famille finie $F_1, \ldots, F_n$ de sous-espaces vectoriels de E. Montrons que $F = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

❷

Cas particulier : sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n = \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$. De façon générale, il existe principalement deux types de description des sous-espaces de $\mathbf{K}^n$.

➊ ***(Paramétrisation linéaire du sous-espace)*** Il s'agit de préciser une famille de vecteurs qui l'engendre. Par exemple,

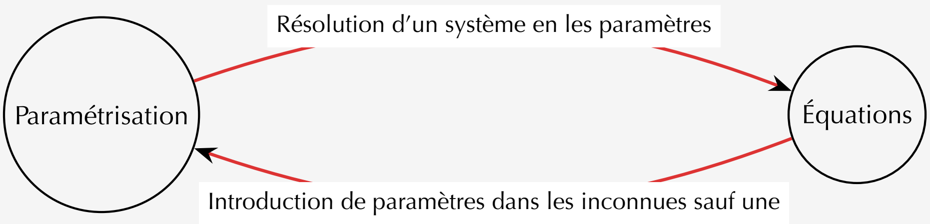
$$F = \mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathbf{K}^4 \qquad \text{où} \qquad a = (1, 2, 1, 1) \quad \text{et} \quad b = (0, 1, 1, 1),$$

la famille (a, b) engendre l'espace vectoriel F.

➋ ***(Description du sous-espace par équations linéaires)*** Ce sont des équations sur les coordonnées des vecteurs, qui caractérisent les vecteurs du sous-espace. Par exemple

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4, \quad x + y + z + t = 0 \text{ et } x = y\right\} \subset \mathbf{K}^4.$$

Méthode | *Lien entre paramétrisation & équations cartésiennes*



Exemple 12 —

➊ *Les vecteurs (x, y, z, t) de F sont ceux qui s'écrivent sous la forme :*

$$(x, y, z, t) = \lambda a + \mu b = (\lambda, 2\lambda + \mu, \lambda + \mu, \lambda + \mu),$$

où λ et μ sont des scalaires. Ainsi :

$$(x, y, z, t) \in F \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & \lambda & & \\ y & = & 2\lambda & + & \mu \\ z & = & \lambda & + & \mu \\ t & = & \lambda & + & \mu \end{array}\right. .$$

Il reste alors à résoudre ce système en (λ, μ) : les équations recherchées sont les équations de compatibilité [...].

➋ *Les vecteurs (x, y, z, t) de G sont ceux qui vérifient :*

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +z & +t & = 0, \\ x & -y & & & = 0. \end{array}\right.$$

Il suffit de résoudre ce système en (x, y, z, t) pour faire apparaître une paramétrisation [...].

2 Familles de vecteurs

Notation | *Famille/Ensemble ?*

Soit E un ensemble et $x_1, ..., x_n \in E$ avec $n \in \mathbf{N}$. Rappelons les deux notations suivantes :

➊ $(x_1, \ldots, x_n)$ désigne le n-uplet $x_1, \ldots, x_n$ donc *a priori* $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \neq (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$. On parle de *famille*.

❷ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ désigne l'ensemble contenant les $x_1, \ldots, x_n$ donc *a priori*

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} = \{x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n\}$$

. On parle d'*ensemble*, et dans ce cas l'ordre des éléments n'a aucune importance.

L'objectif de cette section est cette fois-ci d'abstraire la notion de repère du plan *i.e.*la faculté de *repérer*, et de manière unique, les vaecteurs par des coordonnées
Le vocabulaire général pour les espaces vectoriels est plutôt le suivant : les repères seront appelés des *bases* et le nombre d'éléments d'un repère sera appelé la *dimension*.

2.1 Famille libre

Définition 5 | *Famille libre/liée*

❶ ***(Pour une famille finie de vecteurs)*** Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs d'un **K**-espace vectoriel E. On dit que $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une *famille libre* de vecteurs de E, ou que les vecteurs x_1, ..., x_n sont *linéairement indépendants*, si :

$$\forall(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbf{K}^n, \quad \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_k = 0\right].$$

❷ ***(Pour une famille quelconque de vecteurs)*** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par un ensemble I. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est libre dans E si toute sous-famille **finie** est libre. Si ce n'est pas le cas, on dit que la famille est liée.

■ **Remarque 2.1 — Lien avec l'identification** Quitte à remplacer λ_i par $\lambda_i - \mu_i$ dans la définition, nous pouvons aussi dire que : $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs d'un **K**-espace vectoriel E si l'on peut identifier deux combinaisons linéaires

$$\forall(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, (\mu_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbf{K}^n, \quad \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k\right].$$

En effet,

■

Méthode | *Montrer la liberté/liaison d'une famille*

❶ Pour montrer qu'une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre, on écrit :

« Soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbf{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$. Alors [...] donc les λ_k sont tous nuls. » En général, l'étape [...] consiste en les arguments suivants :

- Dans $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$: on résout un système linéaire.
- Dans $\mathbf{R}^I$, $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ on fait de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*).

❷ Pour montrer qu'une famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est liée, on écrit :

« [...]. Posons alors $\lambda_1 = ...$, ..., $\lambda_n = ...$: on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$, mais les λ_k ne sont pas tous nuls. »

Exemple 13 —

❶ On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants $x_1 = (1, 0, 2)$, $x_2 = (0, 1, 1)$ et $x_3 = (1, 0, 1)$. La famille (x_1, x_2, x_3) est-elle libre ?

❷ Montrons que $(\cos, \sin)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

❸ Montrons que $(1, (2^n)_n, (3^n)_n)$ est libre dans $\mathbf{R}^\mathbf{N}$. Généraliser.

Attention | *Égalité à zéro dans un espace vectoriel de fonctions*

Nous venons de passer au-dessus d'une source d'erreur classique. L'égalité

$$\lambda \cos + \mu \sin = 0_{\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})},$$

signifie que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},} \quad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0,$$

puisque la fonction $0_{\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})}$ est la fonction nulle. Le quantificateur « $\forall$ » est ici fondamental pour démontrer la liberté, attention aux oublis dans votre rédaction.

Dans la suite sur les familles libres nous travaillerons uniquement avec des familles finies, même si l'ensemble des résultats s'adaptent aux familles quelconques.

Plus généralement, nous avons :

Égalité	Signification
Pour des uplets : $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$	$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad x_i = y_i,$
Pour des suites : $(u_n) = (v_n)$	$\forall n, \quad u_n = v_n.$
Pour des polynômes : $\sum_{k=1}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} b_k X^k$	$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad a_k = b_k,$
Pour des fonctions : $f = g$	$\forall x, \quad f(x) = g(x).$

Théorème 1 | *Familles échelonnées de polynômes*

Toute famille finie de polynômes de degrés échelonnés non nuls de $\mathbf{K}[X]$ est libre.

Preuve

Proposition 6 | *Propriétés des familles liées*

Soit $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

➊ Si l'un des vecteurs x_{k_0} est nul, alors la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est liée.

➋ Si l'un des vecteurs x_{k_0} apparaît plus d'une fois dans la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, alors celle-ci est liée.

Preuve

Proposition 7 | *Caractérisation des familles liées*

Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. La famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est liée **si et seulement si** un de ses vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille :

$$\exists k_0 \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \exists (\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbf{K}^n, \quad x_{k_0} = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq k_0}} \lambda_k x_k.$$

Preuve

Exemple 14 —

- Dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, un couple (u, v) de vecteurs liés est un couple de vecteurs *colinéaires*.
- Dans un $\mathbf{R}^3$, un triplet (u, v, w) de vecteurs liés est un triplet de vecteurs *coplanaires*.

2.2 Familles génératrices

Définition 6 | *Famille génératrice*

Soit F un sous-espace vectoriel d'un **K**-espace vectoriel E. On appelle *famille génératrice* de F toute famille $(x_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble, de vecteurs de F telle que $F = \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$.
Autrement dit, tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire **finie** d'éléments de $(x_i)_{i\in I}$. On dit aussi que F *est engendré par les* x_i pour $i \in I$.

Ainsi, pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie on exhibe une famille génératrice finie.

Attention

Nous n'avons pas encore défini ce qu'est la dimension d'un espace de dimension finie, seulement la propriété de « dimension finie

Définition 7 | *Dimension finie*

Soit F un sous-espace vectoriel d'un **K**-espace vectoriel E. On dit que F est de *dimension finie* s'il existe une famille finie engendrant F.

Méthode | *Montrer qu'une famille est génératrice*

Pour montrer qu'une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de vecteurs de F est une famille génératrice de F, on écrit :

« Soit $x \in F$. Alors cherchons λ_1, ..., λ_n tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. [...] On a donc déterminé des λ_i qui conviennent, la famille est génératrice. »
En général, l'étape [...] consiste en les arguments suivants :
- Dans $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$: on résout un système linéaire.
- Dans $\mathbf{R}^I$, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ on fait de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*).

Exemple 15 —

1. Soit $E = \mathrm{R}^2$. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^2$ suivants $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (1,2)$ et $x_3 = (1,3)$. La famille (x_1, x_2, x_3) est-elle une famille génératrice de $\mathbf{R}^2$?

2. Soit $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Donnons une famille génératrice de $F = \{y \in E,\ \ y' = 2y\}$.

③ Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Donnons une famille génératrice de $F = \{(u_n) \in E,\ \forall n \in \mathbf{N},\quad u_{n+1} = 5u_n\}$.

2.3 Base

Définition 8 | *Base*

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On appelle *base* de E toute famille $(x_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble de vecteurs de E qui est à la fois une famille libre, et une famille génératrice de E.

Proposition 8 | *Base et décomposition en coordonnées*

Une famille finie $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de vecteurs de E est une base de E **si et seulement si** tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des x_k.

Soit $x \in E$, et $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Pour tout $k \in [\![1\ ,\ n]\!]$, la constante λ_k s'appelle **la** k-ième coordonnée de x dans la base $(x_1, \ldots, x_n)$.

Preuve

En Mathématiques, l'adjectif *canonique* après « base » signifie « la plus simple ». Un objet autre qu'une base est dit *canonique* s'il ne dépend pas du choix d'une base. Nous présentons ici les notions liées au premier cas.

Définition/Proposition 2 | *Bases canoniques de* $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[x]$

❶ **Dans $\mathbf{K}^n$.** Soient les vecteurs suivants de $\mathbf{K}^n$:

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, ..., 0), \quad ..., \quad e_n = (0, 0, 0, ..., 1).$$

On vérifie que $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbf{K}^n$, appelée *base canonique de* $\mathbf{K}^n$. Autrement dit, e_k s'écrit plus simplement : $e_k = (\delta_{j,k})_{1\leqslant j\leqslant n}$.

❷ **Dans $\mathbf{K}^n[\mathrm{X}]$.** La famille $(\mathrm{X}^k)_{0\leqslant k\leqslant n} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, ..., \mathrm{X}^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[\mathrm{X}]$, appelée *base canonique de* $\mathbf{K}_n[\mathrm{X}]$.

■ **Exemple 16 —** Montrer que la famille $((1, 1), (1, -2))$ est une base de $\mathbf{R}^2$.

■

■ **Exemple 17 —** Montrer que la famille $(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}, \mathrm{X}^2 + 1, \mathrm{X} + 1)$ est une base de $\mathbf{R}_2[\mathrm{X}]$.

2.4 Extraction & Complétion

Il est possible de construire des bases à l'aide de familles libres (en complétant), et de familles génératrices (en extrayant). La connaissance des preuves de ces résultats ne sont pas au programme de BCPST, seul le principe doit être connu. Nous allons établir deux faits principaux :

➊ toute famille libre peut être complétée en une base (de-même, toute famille génératrice peut être diminuée en une base),

➋ toutes les bases ont même cardinal ; cet entier, nous allons l'appeler la *dimension*.

Proposition 9 | *Augmentation d'une famille libre finie*

Soient $\mathcal{L} = (\ell_1, ..., \ell_n)$ une famille libre d'un **K**-espace vectoriel E, et $\ell_{n+1} \in$ E.
Si $\ell_{n+1} \notin \operatorname{Vect} \mathcal{L}$, alors $\mathcal{L}' = (\ell_1, ..., \ell_n, \ell_{n+1})$ est encore une famille libre.

Preuve

Exemple 18 — Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $\mathcal{L} = (\ell_1, \ell_2) = ((2, 1, 0), (1, -1, 0))$. Que dire de $\ell_3 = (2, 3, 1)$?

Proposition 10 | *Diminution d'une famille génératrice finie*

Soit $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_{n+1})$ une famille génératrice d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.[34]
Si $g_{n+1} \in \operatorname{Vect}(g_1, \ldots, g_n)$, alors $\mathcal{G}' = (g_1, \ldots, g_n)$ est encore une famille génératrice de E.

Preuve

Remarque 2.2 — Autrement dit, on peut augmenter une famille libre finie (en une nouvelle famille libre) en ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ceux de la famille.
D'autre part, on peut diminuer une famille génératrice finie (en une nouvelle famille génératrice) en retirant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

Exemple 19 — On considère le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ suivant $E = \operatorname{Vect}(g_1, g_2, g_3)$, où $g_1 = (2, 1, 3)$, $g_2 = (1, 0, 1)$. Que dire de $g_3 = (1, 1, 2)$?

34. Dit autrement, l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Algorithme de la base incomplète.

Théorème 2 | *Algorithme de la base incomplète*

Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ une famille libre finie de E et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_q)$ une famille génératrice finie de E. Alors il existe une base de la forme

$$\mathcal{B} = (\underbrace{\ell_1, \ldots, \ell_p}_{\text{proviennent de } \mathcal{L}}, \underbrace{\ell_{p+1}, \ldots, \ell_n}_{\text{proviennent de } \mathcal{G}}).$$

La preuve ci-dessous fournit en outre un algorithme pour construire une base comme *supra*. Si $\mathrm{E} = \{0_\mathrm{E}\}$ alors E ne possède aucune famille libre, le résultat précédent ne s'applique donc pas.

Preuve

1. **Construction algorithmique de la base** $\mathcal{B}$**–** ce théorème repose sur un algorithme simple et fondamental dit de la base incomplète. Nous allons compléter peu à peu la famille libre $\mathcal{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ à l'aide de certains vecteurs parmi $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_q)$ en prenant soin de conserver la liberté à chaque ajout.
   - Commençons par considérer $\mathcal{B} = \mathcal{L}$.
   - Ensuite, pour $k \in [\![1\,,\,q]\!]$, si $(\mathcal{B}, g_k)$ est encore libre on modifie $\mathcal{B}$: $\mathcal{B} \longleftarrow (\mathcal{B}, g_k)$ où $(\mathcal{B}, g_k)$ désigne la famille $\mathcal{B}$ augmentée de g_k. Sinon nous ne faisons rien.

   Puisque k par k la famille est libre, la base $\mathcal{B}$ obtenue à l'arrivée est encore libre.
2. **La famille** $\mathcal{B}$ **ainsi construite convient–** en effet, nous savons déjà que $\mathcal{B}$ est une famille libre, il reste donc à montrer qu'elle est génératrice.

   Or, par hypothèse, la famille $\mathcal{G}$ génère E donc il suffit de montrer que chaque g_i pour $i \in [\![1, q]\!]$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$ notés ℓ_i avec $i \in [\![1\,,\,n]\!]$.
   Soit donc $i \in [\![1\,,\,q]\!]$. Si $g_i \in \mathcal{B}$ alors évidemment il est combinaison linéaire de lui-même.
   Sinon, $g_i \notin \mathcal{B}$, cela signifie qu'à l'étape $k = i$ de l'algorithme nous n'avons pas ajouté g_i dans la famille $\mathcal{B}$ parce qu'il était combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. C'est donc terminé.

■ **Remarque 2.3 —** Autrement dit, on peut compléter une famille libre finie en une base en ajoutant des vecteurs puisés dans une famille génératrice finie.

Théorème 3 | *Base incomplète/extraîte*

Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et tel que $E \neq \{0_E\}$.

➊ **Théorème de la base incomplète** :

Toute famille libre finie de E peut être complétée en une base de E.

➋ **Théorème de la base extraite** :

De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base de E.

En particulier, E admet une base.

Preuve

➊ Si E est de dimension finie, alors E possède une famille génératrice finie $\mathcal{G}$. Ainsi, si $\mathcal{L}$ est une famille libre finie, nous pouvons lui appliquer l'algorithme de la base incomplète donné par le Théorème 2 précédent.

➋ Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Puisque $E \neq \{0_E\}$, nous pouvons choisir un élément $x \neq 0_E$ dans E. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 2 précédent à la famille $(x) \cup \mathcal{G}$, qui donne le résultat.

■ **Exemple 20 —** La famille $((1,-5,7)(2,6,8))$ est une base de $F = \mathrm{Vect}\left((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1)\right)$.

■

■ **Exemple 21 —** On considère la famille de $\mathbf{R}^4$ suivante :

$$\mathcal{G} = \left((1,0,2,1),(2,1,3,2),(1,1,1,1),(0,1,-1,-1),(2,0,4,3)\right).$$

Déterminons une base de $\mathrm{Vect}\,\mathcal{G}$, extraite de $\mathcal{G}$.

3 Dimension

3.1 Généralités

Nous admettons dans cette dernière section ce résultat, appelé aussi *lemme de Steinitz* dont la preuve est technique, et qui permet de comparer le nombre d'éléments d'une famille libre par rapport au nombre d'éléments d'une famille génératrice.

Lemme 1 | *de Steinitz — Comparaison du nombre de vecteurs d'une famille libre ou génératrice*

Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors :

$$\# \mathcal{L} \leqslant \# \mathcal{G}.$$

Preuve

Admis.

Définition/Proposition 3 | *Dimension*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments, on l'appelle la *dimension* de E, et notée dim E avec comme convention *ad hoc* $\dim \{0_{\mathrm{E}}\} = 0$.

Preuve

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E ayant respectivement n et n' éléments.

Définition 9 | *Droite vectorielle, plan & Hyperplan*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace vectoriel F de E est appelé :

- *droite vectorielle* si $\dim F = 1$,
- *plan vectoriel* si $\dim F = 2$,
- *hyperplan* si $\dim F = \dim E - 1$.

Attention | *Confusion cardinal/dimension*

Ne pas confondre les notions de cardinal et de dimension ! Une famille a un certain cardinal mais pas de dimension, et par contre un espace vectoriel (de dimension finie) a une dimension mais est toujours de cardinal infini lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (sauf $\{0\}$). On a toujours, si $\mathscr{B}$ est une base de E :

$$\dim E = \# \mathscr{B}.$$

Exemple 22 —

1. $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}^n = n$ (notamment $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K} = 1$).
2. $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^2 = 2$, mais $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}^2 = 4$.

3. $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n[X] = n + \boxed{1}$.
4. Dans $E = \mathbf{K}^n$, tout sous-espace défini par une équation linéaire non triviale

$$F = \left\{ (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in E, \;\; a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \right\} \quad \text{(où les } a_k \in \mathbf{K} \text{ ne sont pas tous nuls),}$$

est un hyperplan. Pour le prouver, il suffit d'en obtenir une paramétrisation.

Attention
Comme déjà dit, cette méthode doit être connue.

❺ L'ensemble des solutions réelles d'une équation différentielle linéaire homogène normalisée d'ordre un est un **R**-espace vectoriel de dimension un. Nous le reverrons dans le Chapitre II.2.

❻ L'ensemble des solutions réelles d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants est un **R**-espace vectoriel de dimension deux. Nous le reverrons dans le Chapitre II.3.

Enfin, un résultat fondamental qui nous permet de gagner du temps en pratique : lorsque le nombre d'éléments d'une famille est égal à la dimension de l'espace en question (encore faut-il la connaître, on l'utilisera donc que dans ce cas), il suffit de prouver le caractère générateur **OU** libre.

Théorème 4

Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathcal{F}$ une famille finie de n vecteurs de E. Alors :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \iff \mathcal{F} \text{ est une famille libre de E} \iff \mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de E.}$$

Preuve

Dans un **K**-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, si une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs est libre (*resp.* génératrice), on peut la compléter en une base d'après le théorème de la base incomplète (*resp.* en extraire une base d'après le théorème de la base extraite).
Le résultat est une famille de n vecteurs par définition de la dimension, ce qui veut dire qu'on n'a en fait ajouté (*resp.* ôté) aucun vecteur à $\mathcal{B}$. Conclusion : $\mathcal{B}$ était une base dès le départ !

■ **Remarque 3.1 —** Et en général, on préfère souvent montrer qu'une famille est libre... c'est souvent plus rapide.

■ **Exemple 23 —**

❶ La famille de polynômes $\mathcal{F} = \left(1, X - a, (X - a)^2, (X - a)^3\right)$ est une base de $\mathbf{K}_3[X]$.

❷ La famille $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Dimension d'un produit cartésien.

Proposition 11 | *Cas de deux espaces vectoriels*

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $E \times F$ est de dimension finie et : $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Preuve

3.2 Sous-espaces et dimension

Proposition 12

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F est de dimension finie et $\dim_{\mathbf{K}} F \leqslant \dim_{\mathbf{K}} E$.
2. $\dim_{\mathbf{K}} F = \dim_{\mathbf{K}} E \iff F = E$.

Preuve

3.3 Rang

Définition 10 | *Rang d'une famille de vecteurs*

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille finie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On appelle *rang sur* $\mathbf{K}$ *de la famille* $(x_1, \ldots, x_n)$, et on note $\mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(x_1, \ldots, x_n)$, la dimension sur $\mathbf{K}$ de $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(x_1, \ldots, x_n) = \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Exemple 24 —

1. Dans $\mathbf{K}[X]$, on a : $\mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(1, X, X^2, X^3) = 4.$
2. Dans $\mathbf{K}[X]$, on a : $\mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(0_{\mathbf{K}[X]}, X, 2X, 3X) = 1.$
3. Dans $\mathbf{R}^3$, on a : $\mathrm{Rg}_{\mathbf{R}}((1,1,0),(0,0,1)) = 2.$
4. Dans $\mathbf{R}^3$, on a : $\mathrm{Rg}_{\mathbf{R}}((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)) = 2.$

4 Applications linéaires

Les espaces vectoriels sont en particulier des ensembles, on peut donc tout à fait considérer des applications entre eux. Mais ceci ne tient pas compte des opérations $+, .$, on va donc plutôt considérer une notion plus riche : celle d'application linaire que nous définissons dès à présent.

4.1 Généralités

Définition 11 | *Application linéaire*

Soient $(E, +_E, ._E)$ et $(F, +_F, ._F)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On appelle *application* $\boxed{\mathbf{K}}$*-linéaire* (parfois aussi *morphisme linéaire*) de E dans F toute application $u : E \longrightarrow F$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \boxed{\mathbf{K}}^2, \quad u(\lambda._E x +_E \mu._E y) = \lambda._F u(x) +_F \mu._F u(y),$$

ou plus simplement

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \boxed{\mathbf{K}}^2, \quad u(\lambda.x + \mu y) = \lambda.u(x) + \mu.u(y).$$

On note $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications K-linéaires de E dans F, ou plus simplement $\mathcal{L}(E, F)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Lorsque $E = F$, on dit que u est un *endomorphisme*. Si $F = \mathbf{K}$ alors on dit que u est une *forme linéaire* sur E, on note parfois $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, \mathbf{K}) = \mathbf{E}^\star$ appelé *espace dual* de E.

Puisqu'il s'agit de notre définition initiale, nous notons très correctement en indices les espaces vectoriels auxquels sont attachées les opérations, nous ne le ferons quasiment plus dans la suite !

Définition 12 | *Identité et homothétie*

- $\mathrm{Id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E, appelé *endomorphisme identité*.
- Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, l'application $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme de E appelé *homothétie* de *rapport* λ.

Remarque

Et de la dernière égalité pour $\lambda = 0$, on a : $u(0_E) = 0_F$.

■ **Remarque 4.1 —** De façon équivalente, l'application $u : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si elle est compatible avec la somme et la multiplication par un scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad u(x +_E y) = u(x) +_F u(y),$$
$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \forall x \in E, \quad u(\lambda._E x) = \lambda._F u(x).$$

En particulier, on retient donc de la définition que, si u est $\boxed{\mathbf{K}}$-linéaire, on peut sortir les scalaires de $\boxed{\mathbf{K}}$ et uniquement ceux-là. Nous utilisons ce fait dans les exemples qui suivent.

■ **Exemple 25 —** ***Cas de*** $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K},\mathbf{K})$. Eh bien on retrouve les applications linéaires vues en classe de 3ème du type $f : x \longmapsto kx$ avec $k = f(1) \in \mathbf{R}$ et toute application linéaire est même une homothétie dans ce cas.

■

■ **Exemple 26 —** Déterminer $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C},\mathbf{C})$.

■

■ **Exemple 27 —** Déterminer $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^2,\mathbf{K})$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^2,\mathbf{K}^2)$.

■

■ **Exemple 28 —** Les applications suivantes sont linéaires :

$$D : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P', \end{array}\right. \qquad \varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}\right.$$

$$\psi : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ f & \longmapsto & (f(0),f(1),f(2)), \end{array}\right. \qquad s_g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}} \end{array}\right. .$$

L'aplication s_g est généralement appelée *décalage gauche* ou *left shift*. De-même on définit aussi s_d *décalage droite*.

4.2 Structure de K-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$

Proposition 13 | *Opérations sur les applications linéaires — Structure d'espace vectoriel*

Soient E, F et G des **K**-espaces vectoriels.

➊ *Combinaison linéaire*. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ et $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Alors $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}(E, F)$. Ces opérations définissent une structure de **K**-espace vectoriel $(\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F), +, .)$.

➋ *Composition*. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors : $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

❸ *Restriction*. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et V un sous-espace vectoriel de E. Alors l'application

$$u|_V \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est appelée *application restreinte de u à V*. C'est une application linéaire de V dans F.

Preuve

Attention

Même si $u|_V$ et u coïncident sur V, en tant qu'application elles sont différentes (puisque leur espace de départ n'est pas le même).

Exemple 29 — On considère les applications :

$$u \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (0, x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad v \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0) \end{array} \right.$$

Calculons $u \circ v$ et $v \circ u$. Que constate-t-on ?

Attention

En général, on note plutôt uv pour des applications linéaires au lieu de $u \circ v$. Mais soyez méfiant vis-à-vis de cette notation, cela ne désigne en aucun cas l'application produit $x \longmapsto u(x)v(x)$ qui n'a même aucun sens ici. [49]

Proposition 14 | *Autres propriétés*

❶ Pour $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$, on a la formule du *binôme de Newton :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

❷ Pour $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$, on a la formule de factorisation :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u^n - v^n = (u-v) \sum_{k=0}^{n-1} u^{n-1-k} v^k.$$

❸ Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v = \mathrm{Id}_E$, cette formule fait apparaître une somme géométrique :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathrm{Id}_E - u^n = (\mathrm{Id}_E - u) \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Preuve

■ **Remarque 4.2 —** Sans hypothèse de commutativité sur $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$, on peut quand-même développer les quantités précédentes, mais les formules sont plus compliquées.

49. Pourquoi ? Nous l'avons déjà vu : nous ne pouvons pas multiplier deux vecteurs entre eux.

Le faire ci-dessous pour $(u+v)^2$ ou $(u-v)^2$.

■

4.3 Image & Noyau

La notion d'image d'application a déjà été rencontrée en première année, elle est donc toujours en vigueur pour des applications en particulier linéaires, et fortement reliée à la surjectivité. Nous allons voir que l'injectivité peut dans ce cas être reformulée à l'aide du *noyau* ; mais bien entendu il est toujours possible de recourir à la définition basique vue l'année dernière. C'est-à-dire « une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ entre deux ensembles E et F est injective si

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, \quad f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'. \text{ »}$$

Définition/Proposition 4 | *Image réciproque, Image directe*

Soient $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application linéaire entre $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, V un sous-espace vectoriel de E et W un sous-espace vectoriel de F. Alors :

1. $u(\mathrm{V}) = \{u(x),\ x \in \mathrm{V}\}$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé *image directe de* V *par* u,
2. $u^{-1}(\mathrm{W}) = \{x \in \mathrm{E},\ u(x) \in \mathrm{W}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé *image réciproque* de W par u.

■ **Remarque 4.3 — Piège de notation** Rappelons que contrairement à ce que la notation laisse penser, il n'est pas du tout obligatoire que u^{-1} existe pour que $u^{-1}(\mathrm{W})$ ait un sens : la définition de $u^{-1}(\mathrm{W})$ ne fait pas appel à l'existence supposée d'une bijection réciproque !

■

Preuve

Définition 13 | *Image*

Soient E et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *image de u*, et on note $\operatorname{Im} u$, l'image directe de E par l'application u :

$$\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x), \ x \in E\}.$$

C'est le sous-espace de F constitué des vecteurs qui sont l'image d'un vecteur de E par u. Pour $y \in F$:

$$y \in \operatorname{Im} u \iff \exists x \in E, \quad y = u(x).$$

Exemple 30 — Soient E et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Alors, on a : $\operatorname{Im}(0_{\mathcal{L}(E,F)}) = \{0_F\}$, $\operatorname{Ker}(0_{\mathcal{L}(E,F)}) = E$, $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E) = E$ et $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E) = \{0_E\}$.

Définition 14 | *Noyau*

On appelle *noyau* de u, et on note $\operatorname{Ker} u$, l'image réciproque de $\{0_F\}$ par u :

$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, \ u(x) = 0_F\}.$$

C'est le sous-espace de E constitué des vecteurs ayant 0_F pour image par u. Donc, pour $x \in E$:

$$x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 0_F.$$

Proposition 15 | *Caractérisation de la surjectivité/injectivité pour les applications linéaires*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est injective} &\iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\}, \\ u \text{ est surjective} &\iff \operatorname{Im} u = F. \end{aligned}$$

Preuve

Attention

Notez bien que dans la preuve précédente, la linéarité fut **fondamentale** pour écrire pour tous $x, x' \in E$:

$$u(x) = u(x') \iff u(x - x') = 0_F \iff x - x' \in \operatorname{Ker} u.$$

Pas question donc de calculer des noyaux pour montrer qu'une application **NON** linéaire est injective.

Proposition 16 | *Image directe d'un* « Vect »

Soient E et F des **K**-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :

$$u\left(\operatorname{Vect}(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}\right) = \operatorname{Vect}(u(x_k))_{1 \leqslant k \leqslant n}.$$

En particulier, si E est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est engendré par l'image d'une base de E, et est donc de dimension finie.

Méthode | *Image d'une application si une famille génératrice de l'espace de départ est connue*

Dans ce cas, on a $E = \operatorname{Vect}(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, et $u(E)$ se calcule grâce à la proposition.

Preuve *(Point clef — Linéarité de u)*

On a :

$$y \in u\left(\mathrm{Vect}\,(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\right) \iff \text{il existe } \lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ \ y = u\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)$$

$$\underset{\text{linéarité}}{\iff} \text{il existe } \lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ \ y = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u\,(x_i) \iff y \in \mathrm{Vect}\,(u(x_k))_{1\leqslant k\leqslant n}\,.$$

■ **Exemple 31 —** Déterminer l'image de $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z) \end{array}\right.$.

■

■ **Exemple 32 —**

❶ On considère : $u \ : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{array}\right.$.

Montrons que u est linéaire, déterminons $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$. L'application u est-elle injective ? surjective ?

❷ Même travail avec l'application : $v \ : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, y, -x+y). \end{array}\right.$

❸ Même travail avec l'application : $D \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathrm{I}, \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$ où I est un intervalle de **R**.

❹ Même travail avec l'application : $\Psi \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & (au_n) \end{array} \right.$ où $a \in \mathbf{R}$.

❺ ***(Décalages dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$)*** Même travail avec les applications s_d et s_g de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définis par :

$$s_d(u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots) = (0, u_0, u_1, u_2, \ldots) \qquad \text{et} \qquad s_g(u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots) = (u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots).$$

Étudions l'injectivité et la surjectivité de s_d et s_g. Que valent $s_d \circ s_g$ et $s_g \circ s_d$?

4.4 Isomorphismes

Définition 15 | *Isomorphisme, Automorphisme*

On appelle *isomorphisme* entre deux espaces vectoriels E et F toute application linéaire bijective de E dans F, dans ce cas on dit que E et F sont isomorphes.
On appelle *automorphisme* de E tout endomorphisme bijectif de E : c'est donc un isomorphisme de E dans E.

Définition 16 | *Groupe linéaire* $\mathcal{GL}(\mathrm{E})$

Soit E un **K**-espace vectoriel, l'ensemble des isomorphismes linéaires de E est noté $\mathcal{GL}(\mathrm{E})$ et appelé *groupe linéaire sur* E.

Une application bijective $u \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ (*i.e.*injective et surjective de E dans F) possède (voir cours de 1ère année) une application inverse $u^{-1} \in \mathcal{F}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$, *i.e.*satisfaisant :

$$u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}, \quad u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}.$$

Si celle de départ est linéaire, on montre que l'inverse l'est aussi comme le précise la Proposition 17.

Proposition 17 | *Linéarité de l'inverse*

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Si u est un isomorphisme, alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ est un isomorphisme.

Preuve

Il suffit de montrer que u^{-1} est linéaire elle aussi.

Proposition 18 | *Inverse d'une composée de bijections*

Soient $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux isomorphismes de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Alors $v \circ u$ est un isomorphisme de E dans G et $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Preuve

4.5 Équations linéaires

Pour achever cette section, nous allons voir la structure des solutions d'une *équation linéaire*. Résultats que nous allons appliquer aux équations différentielles, et aux suites récurrentes linéaires. Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Définition 17

On appelle *équation linéaire* toute équation, d'inconnue $x \in E$, de la forme

$$f(x) = y_0$$

où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y_0 \in F$. L'équation

$$f(x) = 0_F$$

est appelée *équation homogène associée* à l'équation précédente.

Donnons sans plus tarder trois exemples :

- ***(Dans** $E = F = \mathbf{R}$ **ou** $\mathbf{R}^n$**)*** Soit $y_0 \in \mathbf{R}$ et $f : x \longmapsto kx$ avec $k \in \mathbf{R}$. L'équation $kx = y_0$ est une équation linéaire. Plus généralement dans $\mathbf{R}^n$, l'équation $AX = Y_0$ avec Y_0 une colonne et A une matrice est un système linéaire (nous reverrons cela dans le prochain chapitre).
- ***(Dans** $E = F = \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$**)*** avec I un intervalle et $f : y \in E \longmapsto y' - y$, $y_0 \in F$ une fonction arbitraire, est une équation linéaire, c'est même une équation différentielle de second membre y_0 : $y' - y = y_0$.
- ***(Dans** $E = F = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$**)*** , $f : (u_n) \in E \longmapsto (u_{n+1} - au_n)$, $(y_0) \in F$ une suite constante, est une équation linéaire, l'ensemble des solutions est même l'ensemble des suites arithmético-géométriques de paramètres a, y_0.

On voit donc bien que cette définition englobe donc beaucoup de choses bien connues. Passons à la structure de l'ensemble des solutions.

Théorème 5 | *Solutions d'une équation linéaire.*

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y_0 \in F$. On considère l'équation

$$f(x) = y_0 \qquad (E)$$

d'inconnue $x \in E$.

❶ Si $y_0 \notin \operatorname{Im} f$, alors (E) n'admet pas de solution.

❷ Si $y_0 \in \operatorname{Im} f$, alors l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble

$$x_0 + \operatorname{Ker} f = \{x_0 + x \mid x \in \operatorname{Ker} f\},$$

où x_0 est une solution particulière de (E).

Preuve

On retiendra donc l'idée selon laquelle la solution générale de l'équation (linéaire) complète est égale à la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

4.6 Cas particulier de la dimension finie

4.6.1. Image de familles de vecteurs

Théorème 6 | *Construction d'une application linéaire à l'aide d'une base*

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et de **base** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille **quelconque** de n vecteurs de F. Alors :

il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\quad \forall i \in [\![1\,,\,n]\!], \quad u(e_i) = f_i,$

De plus, avec u ainsi construite,

❶ u est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une famille libre de F,

❷ u est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F,

❸ u est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de F.

Preuve

Commençons par construire u.

La propriété ❸ est immédiate en combinant ❶ et ❷. Montrons ❶.

Montrons ❷.

■ **Remarque 4.4 —** On retiendra notamment deux idées importantes :

- une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base ; ce fait est important à analyser pour comprendre la notion de matrice,
- u est un isomorphisme si et seulement si l'image **d'une** base de E est une base de F.

■

Méthode | *Construction d'applications linéaires à l'aide d'une base*

À la question « construisez une application linéaire entre E et F », si vous connaissez une base $\mathcal{B} =$

$(e_1, ..., e_n)$, vous pouvez répondre :

$$\text{je pose} \quad u(e_1) = \text{Truc}_1 \in F, \quad \dots, \quad \text{je pose} \quad u(e_n) = \text{Truc}_n,$$

en découlera alors automatiquement $u(x)$ pour tout $x \in E$ par linéarité.

Corollaire 1

Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et de base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et F un **K**-espace vectoriel de dimension quelconque. L'application suivante est un isomorphisme :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_k))_{1 \leqslant k \leqslant n} \end{array} \right.$$

Preuve

Immédiat par existence et unicité de u dans le Théorème 6.

Corollaire 2

Deux **K**-espaces vectoriels de dimensions finies E et F sont isomorphes, *i.e.* il existe un isomorphisme entre E et F si et seulement si

$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F.$$

Preuve

Remarque 4.5 — Ainsi, tout **K**-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ est isomorphe à $\mathbf{K}^n$. Ce n'était donc pas déraisonnable de commencer par étudier $\mathbf{K}^n$ en première année, vous avez en fait vu l'espace vectoriel *typique* (c'est-à-dire à isomorphisme près) de dimension finie.
Par exemple, l'espace vectoriel $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ est isomorphe à $\mathbf{K}^n$ aussi *via* :

$$a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} \in \mathbf{K}_{n-1}[X] \longmapsto (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n,$$

on vérifie facilement par ailleurs que cette application est linéaire et bijective :

■

Théorème 7 | *Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$*

Soient E et F des **K**-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et :

$$\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{L}(E, F) = \dim_{\mathbf{K}} E \times \dim_{\mathbf{K}} F.$$

En particulier, on a : $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{E}^{\star} = 1.$

Preuve

Admis provisoirement.

4.6.2. Rang d'une application linéaire

Définition 18 | *Rang d'une application linéaire*

Soient E et F des **K**-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est *de rang fini* si $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie. On appelle alors *rang de u* sur **K**, et on note $\mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(u)$, la dimension de $\mathrm{Im}\, u$ sur **K** :

$$\mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(u) = \dim_{\mathbf{K}}(\mathrm{Im}\, u)$$

La notion de rang décrite ici est fortement reliée à la notion de rang d'une famille de vecteurs définie précédemment. Le lien entre les deux apparaît avec le théorème suivant, qui pourra aussi s'écrire ultérieurement avec des matrices.

Théorème 8 | *Rang d'une application linéaire et rang d'une famille de vecteurs*

Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, F un **K**-espace vectoriel de dimension quelconque, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, u est de rang fini et :

$$\mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(u) = \mathrm{Rg}_{\mathbf{K}}(u(\mathcal{B})) = \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{Vect}\left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right).$$

Notez bien que le membre de gauche du théorème précédent est la notion de rang d'application que l'on vient de définir, les deux membres de droite correspondent à la notion de rang d'une famille de vecteurs.

Preuve

■ **Remarque 4.6 —** On en déduit notamment que si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\dim_{\mathbf{K}} E = n \in \mathbf{N}$ et $\dim_{\mathbf{K}} F = p \in \mathbf{N}$, alors

$$\boxed{\operatorname{Rg}_{\mathbf{K}} u \leqslant \min(n, p)}.$$

■

Propriétés du rang.

Proposition 19 | *Invariance du rang par composition avec un isomorphisme*

Soient E, E′, F et F′ des **K**-espaces vectoriels, $v \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de rang fini, $u \in \mathcal{L}(E', E)$ et $w \in \mathcal{L}(F, F')$ deux isomorphismes. Alors $v \circ u$ et $w \circ v$ sont de rangs finis et :

$$\operatorname{Rg}_{\mathbf{K}}(v) = \operatorname{Rg}_{\mathbf{K}}(v \circ u) = \operatorname{Rg}_{\mathbf{K}}(w \circ v).$$

Preuve

Attention

Bien mettre la dimension de l'espace de **départ** dans le membre de droite.

Théorème 9 | *Théorème du rang*

Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, F un **K**-espace vectoriel de dimension quelconque, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est de rang fini et :

$$\dim_{\mathbf{K}} E = \operatorname{Rg}_{\mathbf{K}}(u) + \dim_{\mathbf{K}} \operatorname{Ker} u$$

Preuve

Notons $n = \dim E$.

❶ ***(Complétion d'une base de*** $\operatorname{Ker} u$***)*** D'après le théorème de la base incomplète, notant $e_1, \ldots, e_p$ une base de $\operatorname{Ker} u$, il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n$ des éléments de E tels que $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E. Notons par ailleurs $S = \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ l'espace vectoriel engendré pas les vecteurs qui complètent.

❷ ***(Il suffit de montrer que*** $v = u|_S \in \mathcal{L}(S, \operatorname{Im} u)$ ***est un isomorphisme.)*** En effet, si c'est le cas, on a alors $\dim S = \dim F$, mais comme $\dim S + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$, le résultat s'en suivra.
Il est immédiat que $v = u|_S \in \mathcal{L}(S, \operatorname{Im} u)$, montrons donc le caractère bijectif. Soit $x \in \operatorname{Ker} v$, *i.e.* $x \in S$ et $x \in \operatorname{Ker} u$, or puisque $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe un unique couple $(x_K, x_S) \in \operatorname{Ker} u \times S$ tel que $x = x_K + x_S$. Mais $x = x + 0$ et $x = 0 + x$ sont deux autres décompositions (puisque $x \in S$ et $x \in \operatorname{Ker} u$) donc par unicité : $x_K = 0 = x_S$ donc $x = 0_E$.
Reste à montrer la surjectivité. Soit $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$, mais comme mentionné plus tôt il existe un unique couple $(x_K, x_S) \in \operatorname{Ker} u \times S$ tel que $x = x_K + x_S$, donc $u(x) = 0 + u(x_S)$, et finalement $u(x_S) = y$ justifie l'existence d'un antécédent dans S pour y.

Attention

L'énoncé est faux en dimension infinie !

Théorème 10

Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels de *même dimension finie* et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

(i) u est bijective $\iff$ ***(ii)*** u est injective $\iff$ ***(iii)*** u est surjective.

Preuve

Application immédiate du théorème du rang : d'après le théorème du rang, on a $\dim E = \operatorname{Rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$, donc

Ce résultat paraît anecdotique, mais il est d'importance capitale dans la pratique : il permet de réduire bon nombre de problèmes à une preuve d'injectivité d'application linéaire (souvent relativement aisée). Voyons deux exemples.

■ **Exemple 33 —** ***Existence d'un polynôme interpolateur*** Soient un entier $n \in \mathbf{N}$ et une famille de $n+1$ réels distincts $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbf{R}^{n+1}$. Montrons que pour toute famille de réels $(y_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbf{R}^{n+1}$ il existe un unique $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad P(x_k) = y_k.$$

Le théorème précédent permet de montrer l'existence et l'unicité sans effort. Si l'on veut rendre le raisonnement plus explicite, on introduira les *polynômes d'interpolation de Lagrange* (consulter le Chapitre I.6 pour plus de détail).

■ **Exemple 34 —** Soit $Q \in \mathbf{R}_n[X]$. Montrons qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $P'+P = Q$.

5 Exercices

5.1 Structure d'espace vectoriel

Exercice I.1.1 Pour chacun des ensembles suivants, indiquer avec justification si c'est un espace vectoriel ou pas, en précisant le corps de base.

1 — L'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui sont nulles en 1 ou nulles en 4.

2 — L'ensemble des fonctions f croissantes sur $\mathbf{R}$.

3 — L'ensemble des suites arithmétiques de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

4 — L'ensemble des suites géométriques de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

5 — L'ensemble des fonctions paires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

6 — L'ensembles des fonctions réelles définies sur $]-1,1[$, continues, positives ou nulles.

7 — L'ensembles des fonctions réelles définies sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice I.1.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix},\ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 \right\}$.

1 — Montrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel engendré par (I, A, A^2, A^3).

2 — Montrer que : $\forall (M, M') \in E,\ M \times M' \in E$ et M et M′ commutent.

3 — Calculer $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^8$ sans calculs.

Exercice I.1.3 On considère l'ensemble A des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfaisant $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + 4$ pour tout $n > 0$.

1 — Trouver un réel k tel que $(a_n - k)_{n\in\mathbf{N}}$ pour $a \in A$ forme un sous-espace vectoriel V de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

2 — Trouver deux suites géométriques de V, on notera r_1 et r_2 leurs raisons supposées différentes.

3 — Vérifier que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour $n > 0$ par : $b_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n + k$ est dans A.

4 — En déduire l'expression d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de A vérifiant pour conditions initiales $a_0 = 0, a_1 = 1$.

5.2 Familles de vecteurs et dimension

Exercice I.1.4 Peut-on déterminer $x, y \in \mathbf{R}$ tels que le vecteur $v = \big(-2, x, y, 3\big)$ soit dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = \big(1, -1, 1, 2\big)$ et $v = \big(-1, 2, 3, 1\big)$?

Exercice I.1.5 Dans $\mathbf{R}^4$ on considère $E_1 = \{(x, x-2z, z, 3z),\ x \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{R}\}$ et $E_2 = \{(0, y, 0, z),\ y \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{R}\}$.

1 — Montrer que ce sont des sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$, et en déterminer une base.

2 — Montrer qu'en concaténant ces deux bases, on obtient une famille qui est une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice I.1.6 Soit $F = \{(x, x - 2it, 3t, it),\ x \in \mathbf{C},\ t \in \mathbf{C}\}$

1 — Montrer que F est un **C**-sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^4$. En donner une famille génératrice.
2 — Donner une famille génératrice en tant que **R** espace vectoriel.

■ **Exercice I.1.7** Soit $E = \mathcal{D}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et $S = \{y \in \mathcal{D}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ 2y'' + 2y' + y = 0\}$.
1 — Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.
2 — Déterminer S et sa dimension.
3 — Soit α fixé dans **R** et $H_\alpha = \{f \in S,\ \ f(0) = f(\alpha) = 0\}$. Déterminer H_α ainsi que sa dimension.

■ **Exercice I.1.8** Soit E l'espace des applications de $]-1;1[$ dans **R**. Soit $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

1 — Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre.
2 — Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

■ **Exercice I.1.9** Soit $E = \mathbf{R}^{]-1,1[}$, et (f_1, f_2, f_3, f_4) la famille de fonctions définies pour tout $x \in]-1,1[$ par
$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$
Quel est le rang de (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

■ **Exercice I.1.10** ***Quelques familles libres***
1 — Pour $k = 0, ..., n$ on définit $e_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2 — Pour $k \in \mathbf{N}$, $f_k : x \mapsto |x-k|$. Montrer que $(f_k)_k$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
3 — On considère la fonction $s_k : x \mapsto \sin\left(x^k\right)$. Montrer que $(s_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre.

■ **Exercice I.1.11** Pour $a \neq b$ deux complexes et $n \geqslant 1$, on définit pour tout $k \in [\![0\,,\,n]\!]$, $\quad P_k(x) = (x-a)^k(x-b)^{n-k}$.
A-t-on une famille libre dans $\mathbf{C}[x]$?

■ **Exercice I.1.12** Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}_+^*}$. On considère les fonctions a, b, c, d, e et f de E définies par :

$$a(x) = e^x, \quad b(x) = xe^x, \quad c(x) = xe^x\ln(x),$$

$$d(x) = x\ln(x), \quad e(x) = x, \quad f(x) = \ln(x).$$

On souhaite montrer que $\mathcal{F} = (a, b, c, d, e, f)$ est une famille libre de E.
1 — Montrer que a, b, d, e et f sont négligeables devant c au voisinage de $+\infty$.
2 — Montrer que $\mathcal{F}$ est libre.

■ **Exercice I.1.13** Soient les suites complexes $u = (1)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, $v = (i^n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $w = (j^n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre dans $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ (on considère que $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est muni de sa structure d'espace vectoriel sur **C**).

5.3 Applications linéaires

■ **Exercice I.1.14** Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires. Pour chaque application linéaire trouvée, déterminer son noyau et son image en en donnant une famille génératrice.
1 — $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto 2x^2$,
2 — $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto 4x - 3$,
3 — $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $x \longmapsto \left(2x, x/\pi, x\sqrt{2}\right)$,

4 — $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2, x \longmapsto (u,v)$, où (u,v) est l'unique solution de $\begin{cases} 3u - v &= x, \\ 6u + 2v &= y \end{cases}$.

5 — $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}), f \longmapsto ff''$,

6 — $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}), f \longmapsto f(x^3)$,

7 — $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}), f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x (x-t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

■ **Exercice I.1.15** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On définit u par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}), \quad u(M) = AM$.

1 — Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}))$.

2 — Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

3 — Déterminer le rang, le noyau et l'image de u.

■ **Exercice I.1.16** On note $E = \mathbf{R}[X]$. Soit l'application $u : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P'(X) - P(2X) \end{array} \right.$.

1 — Montrer que u est une application linéaire.

2 — Soit v la restriction de u à $\mathbf{R}_n[X]$. Montrer que v est un endomorphisme.

■ **Exercice I.1.17** On définit φ par : $\forall P \in \mathbf{R}_3[X], \quad \varphi(P) = (1-X^2)P' + (3X+1)P$.

1 — Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

2 — Donner son noyau. L'application φ est-elle surjective de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}_3[X]$?

■ **Exercice I.1.18** ***Base de Lagrange à quatre points*** Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$. On pose $P_1 = (X-2)(X-3)(X-4)$, $P_2 = (X-1)(X-3)(X-4)$, $P_3 = (X-1)(X-2)(X-4)$ et $P_4 = (X-1)(X-2)(X-3)$.

1 — Montrer que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de E.

2 — Donner les coordonnées de $P = X^3 + X^2 + 3$ dans cette base.

3 — Soit ϕ l'application linéaire définie sur E par $\phi(P) = (P(1), P(2), P(3), P(4))$ pour tout $P \in E$. Montrer que ϕ réalise un isomorphisme de E dans $\mathbf{R}^4$.

■ **Exercice I.1.19** Un endomorphisme de $\mathbf{C}_n\left[X\right]$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et Φ l'application :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+2) - P(X) \end{array} \right. .$$

1 — Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$.

2 — Soit $P \in \operatorname{Ker} \Phi$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$. Montrer que P a une infinité de racines.

3 — Conclure que $\operatorname{Ker} \Phi = \mathbf{C}_0[X]$.

4 — En déduire que $\operatorname{Im} \Phi = \mathbf{C}_{n-1}[X]$.

■ **Exercice I.1.20** Soit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ et $u : E \to \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ définie par

$$u(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) - \cos(x).f(x) \end{array} \right. .$$

1 — Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

2 — Déterminer son noyau et son image.

■ **Exercice I.1.21** Soit E un **K**-espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f]\, g = f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1 — Que dire de $[.]\,. : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ du point de vue de sa linéarité ?

2 — Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$[f]\, g^n = f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}.$$

3 — Montrer que $\left(g^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est une famille libre *i.e.*toute sous-famille finie de $\left(g^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est libre.

5.4 Solutions

Solution (Exercice I.1.9)

On cherches des relations linéaires entre ces fonctions.
Premièrement, remarquons que pour tout $x \in]-1,1[$, $\quad f_1(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) + f_4(x)$. De-même $f_2(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) - f_4(x)$.
Donc $\text{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \text{Vect}\{f_1, f_2\}$. S'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f_1 = \lambda f_2$ alors pour tout $x \in]-1,1[$, $\lambda(1+x) = 1-x$, d'où $\lambda = 0$ et la famille (f_1, f_2) n'est pas liée.
Donc $\text{Rg}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = 2$.

Solution (Exercice I.1.12)

1 — Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{a(x)}{c(x)} = \frac{1}{x\ln x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où $a(x) \underset{x\to\infty}{=} \text{o}(c(x))$. De-même :

$$\begin{aligned}
\frac{b(x)}{c(x)} &= \frac{1}{\ln x} &\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\\
\frac{d(x)}{c(x)} &= \frac{1}{e^x} &\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\\
\frac{e(x)}{c(x)} &= \frac{1}{e^x\ln x} &\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\\
\frac{f(x)}{c(x)} &= \frac{1}{xe^x} &\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{b(x) \underset{x\to\infty}{=} o(c(x))}$, $\boxed{d(x) \underset{x\to\infty}{=} o(c(x))}$, $\boxed{e(x) \underset{x\to\infty}{=} o(c(x))}$ et $\boxed{f(x) \underset{x\to\infty}{=} o(c(x))}$.

2 — Soit $(\lambda_k)_{k\in\{a,b,c,d,e,f\}} \in \mathbf{R}^6$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad \lambda_a a(x) + \lambda_b b(x) + \lambda_c c(x) + \lambda_d d(x) + \lambda_e e(x) + \lambda_f f(x) = 0.$$

D'après la question précédente, on a alors au voisinage de $+\infty$:

$$\lambda_c = -\lambda_a \frac{a(x)}{c(x)} - \lambda_b \frac{b(x)}{c(x)} - \lambda_d \frac{d(x)}{c(x)} - \lambda_e \frac{e(x)}{c(x)} - \lambda_f \frac{f(x)}{c(x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\lambda_c = 0$, d'où :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad \lambda_a a(x) + \lambda_b b(x) + \lambda_d d(x) + \lambda_e e(x) + \lambda_f f(x) = 0.$$

On montre alors comme en **1** que a, d, e et f sont négligeables devant b au voisinage de $+\infty$. On en déduit que $\lambda_b = 0$ puis :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad \lambda_a a(x) + \lambda_d d(x) + \lambda_e e(x) + \lambda_f f(x) = 0.$$

On continue : d, e et f sont négligeables devant a au voisinage de $+\infty$, donc $\lambda_a = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad \lambda_d d(x) + \lambda_e e(x) + \lambda_f f(x) = 0.$$

Les fonctions e et f sont négligeables devant d au voisinage de $+\infty$, d'où $\lambda_d = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad \lambda_e e(x) + \lambda_f f(x) = 0.$$

Enfin, f est négligeable devant e au voisinage de $+\infty$, donc $\lambda_e = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad \lambda_f f(x) = \lambda_f \ln(x) = 0.$$

Solution (Exercice I.1.13) Soient $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{C}^3$ tel que $\lambda u + \mu v + \nu w = 0_{\mathbf{C}^\mathbf{N}}$. On obtient alors, en observant les quatre premiers termes des deux membres de cette égalité (les deux membres sont des suites) :

$$\begin{cases} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 \\ \lambda & + & \mu i & + & \nu j & = & 0 \\ \lambda & + & \mu i^2 & + & \nu j^2 & = & 0 \\ \lambda & + & \mu i^3 & + & \nu j^3 & = & 0 \end{cases}$$

Comme $i^2 = -1$ et $j^3 = 1$, alors ce système se réécrit :

$$\begin{cases} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 \\ \lambda & + & \mu i & + & \nu j & = & 0 \\ \lambda & - & \mu & + & \nu j^2 & = & 0 \\ \lambda & - & \mu i & + & \nu & = & 0 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre L_1 et L_4, on obtient $(1+i)\mu = 0$, d'où $\mu = 0$. En soustrayant membre à membre L_1 et L_2, on obtient alors $(1-j)\nu = 0$, d'où $\nu = 0$. Enfin, L_1 donne $\lambda = 0$. On en conclut donc que (u, v, w) est libre dans $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

■■ *Solution (Exercice I.1.21)*

1 — Démontrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a exactement l'hypothèse de l'énoncé. Supposons le résultat vrai au rang n. Alors

$$fg^{n+1} - g^{n+1}f = fg^n g - g^n gf = (fg^n - g^n f)g + g^n = ng^n + g^n,$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Le résultat est donc établi.

2 — On montre que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \longmapsto [g]\, f$ est linéaire. De-même pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $f \longmapsto [f]\, g$ est linéaire.
On dit que $[.]\,.$ est bilinéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

3 — Considérons $(a_0, ..., a_r) \in \mathbf{K}^r$ tel que

$$a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 g + ... + a_r g^r = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on prend le crochet à gauche par f, et d'après **2)** :

$$[f]\; a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 g + ... + a_r g^r = a_0\,[f]\; \operatorname{Id}_E + a_1\,[f]\, g + ... + a_r\,[f]\, g^r = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Comme f et Id commutent pour la composition le premier terme disparait et on obtient

$$a_1 \operatorname{Id}_E + 2a_2 g + ... + r a_r g^{r-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

En recommençant on annule successivement les termes jusqu'à obtenir $r!a_r = 0$ puis successivement $a_{r-1} = 0, ..., a_0 = 0$.

CHAPITRE I.2

Matrices

Résumé/Plan

Ce chapitre est d'abord constitué de révisions de première année sur les matrices, vues comme des tableaux de nombres sur lesquels des opérations sont autorisées. Nous revoyons que l'ensemble des matrices de même taille possèdent une structure d'espace vectoriel. Enfin, nous reverrons la méthode du Pivot de Gauß afin de calculer le rang d'une matrice, qui nous permettra de proposer une méthode de détermination des éléments propres d'une matrice.

CHAPITRE I.3

Réduction

CHAPITRE I.4

Espaces euclidiens

CHAPITRE I.5

Nombres complexes

CHAPITRE I.6

Polynômes

Deuxième partie

Analyse

CHAPITRE II.1

Fonctions d'une variable

Résumé/Plan

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les éléments d'analyse réelle des fonctions d'une variable. Sa vocation n'est donc pas de se substituer à votre cours de première année.

Nous allons commencer par revoir des généralités sur les fonctions (du vocabulaire mais pas que), nous passerons ensuite aux propriétés analytiques : la continuité pour commencer, ensuite la dérivabilité, et enfin les développements limités qui généralisent l'approximation locale d'une fonction par sa tangente afin de résoudre des problèmes de calculs de limite par exemple.

CHAPITRE II.2

Équations différentielles

Résumé/Plan

Nous repassons en revue dans ce chapitre les principaux éléments de la théorie des équations différentielles vue en première année.
Nous ne savons résoudre qu'une infime partie d'entre elles : nous nous intéresserons qu'aux équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients quelconques, et du second ordre à coefficients constants. Dans la suite EDO signifiera « équation différentielle ordinaire ». Ces équations apparaissent naturellement dans beaucoup de disciplines ; les lois de la mécaniques projetées dans un repère sont des équations différentielles, les lois régissant l'électricité aussi (mailles & noeuds). En revanche ce chapitre sera insuffisant pour traiter des problèmes d'électromagnétisme où apparaissent des équations aux dérivées partielles (*c.f.*le chapitre sur les fonctions de plusieurs variables).
Par rapport à la première année, nous chercherons plus généralement des solutions complexes aux équations différentielles. Intérêt de ce cadre ? Nous verrons notamment qu'il existe des liens féconds entre les solutions particulières d'EDO complexes et celles des versions réelles associées (où l'on prend la partie réelle dans les deux membres).

CHAPITRE II.3

Suites et Séries numériques

Résumé/Plan

Nous commencerons par des résultats sur les suites numériques, qui seront globalement des rappels de première année : des généralités, la notion de suite convergente/divergente, propriétés de convergence des suites et suites récurrentes. Du fait de la densité du cours sur les séries, nous ne pourrons pas tout reprendre. Il est donc **impératif** de relire votre cours de première année avant d'aborder celui-ci.
Nous passerons ensuite aux séries numériques, qui est l'étude de certaines suites particulières : le terme général d'indice n est une somme de n termes de suites réelles. Ces suites apparaissent naturellement dans bon nombre de problèmes en Mathématiques ; de la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, en passant par les calculs d'espérances de variable aléatoire discrètes à support dénombrable. Bref, une théorie générale s'impose et ceci constituera la deuxième grande partie de ce chapitre.
Notez que tous ces objets seront à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ même si on pourrait étendre la théorie à des structures plus générales comme les espaces vectoriels munis d'une norme.

CHAPITRE II.4

Intégration

CHAPITRE II.5

Fonctions de plusieurs variables

Troisième partie

Aléatoire

CHAPITRE III.1

Dénombrement & Espaces probabilisés

CHAPITRE III.2

Variables aléatoires discrets

CHAPITRE III.3

Statistique descriptive

CHAPITRE III.4

Variables aléatoires à densité

CHAPITRE III.5

Théorèmes limites probabilistes

CHAPITRE III.6

Statistique inférentielle

CHAPITRE III.7

Couples aléatoires discrets

Appendices

Annexe : L'alphabet grec

Cet alphabet, très souvent utilisé pour écrire des symboles mathématiques, compte vingt-quatre lettres minuscules et majuscules. Certaines majuscules se retrouvent dans l'alphabet latin.

Minuscules	Majuscules	Prononciation
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
ζ	Z	zêta
η	H	êta
θ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rho
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Y	upsilon
φ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

En minuscules, on utilise en général vingt-un de ces vingt-quatre lettres, à l'exception des lettres ι, o et υ. En effet ces lettres ressemblent trop aux lettres latines i,o et v. On veillera d'ailleurs à ne pas confondre la lettre grecque ω « *omega* » avec la lettre latine w.
En majuscules, on utilise les dix lettres qui ne font pas partie de l'alphabet latin. En l'occurrence, il s'agit de : $\Gamma\ \Delta\ \Theta\ \Lambda\ \Xi\ \Pi\ \Sigma\ \Phi\ \Psi\ \Omega$.