Devoir d'été

à rendre lors du **premier** *cours de mathématiques*

Exercice 1 : autour des développements limités

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $\psi(x) = -\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$.

1. Ecrire un developpement limité de ψ en 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que ψ admet un prolongement par continuité en 0.
   ψ est-elle aussi dérivable en 0 ?
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de ψ en 0. Faire un dessin pour donner l'allure de la courbe de ψ au voisinage à droite de 0 en justifiant votre graphe.
4. Montrer que ψ ainsi prolongée est de classe C^1 sur $[0,1[$.
5. Montrer que ψ définit une bijection de $[0,1[$ dans D à préciser.
   On pourra poser $\psi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^3}$ *et étudier le signe de* h.

Exercice 2 : Probabilités finies

Partie A

On définit la variable X qui correspond au tirage au hasard d'un entier entre 1 et n.
Puis si $(X = k)$ est réalisé, on tire au hasard un entier entre 1 et k et on note Y le résultat.

1. (a) Ecrire une fonction `simulY(n)` en langage Python qui simule la variable Y.
   On rappelle que dans la bibliothèque `random`*, la commande* `randint(a,b)` *renvoie un entier au hasard entre* a *et* b.
   (b) En calculant la moyenne empirique d'un grand nombre `m` de simulations de la variable Y, écrire une fonction `moyY(n,m)` qui calcule une valeur approchée de l'espérance de Y.
2. (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.
4. Calculer la covariance de (X,Y).

Partie B

Une urne contient n boules numérotées de 0 à $n-1$. On effectue 3 tirages successifs avec remise.
On note X, Y et Z les résultats obtenus successivement aux 3 tirages.

1. En s'inspirant de la méthode de la question 1. (b) de la Partie A, écrire un programme qui calcule une valeur approchée de $P(X+Y=Z)$. Faites-le tourner pour $n = 10$ et $m = 10\,000$.
2. Calculer théoriquement la probabilité $P(X+Y=Z)$ et vérifier le résultat du 1.
3. Calculer $P(X+Y+Z=n-1)$.

Exercice 3 : équation différentielle

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
   (a) $y' + 2y = x^2$
   (b) $y' + y = 2\sin x$
   (c) $y' - y = (x+1)e^x$
   (d) $(1+e^x)y' + e^x y = (1+e^x)$ sur $\mathbb{R}$
   (e) $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   (f) $y'' + 2y' + y = e^x$ sur $\mathbb{R}$
   (g) $y'' + y' - 2y = e^x$ sur $\mathbb{R}$
   (h) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ sur $\mathbb{R}$
   (i) $y'' + y = 2\cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$
2. (a) Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle :
   $$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$
   (Indication :on pourra remarquer que $x^3 = x(1+x^2) - x$)
   (b) On appelle solution sur $\mathbb{R}$ toute fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. L'équation admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, lesquelles ?
   (c) Déterminer la solution y sur $]0, +\infty[$ telle que $y(1) = 0.5$.

Exercice 4 : suite récurrente

1. Question de cours : Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis. En donner une illustration graphique.
2. Etudier rapidement la fonction cos sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer qu'elle n'admet qu'un seul point fixe ℓ.
3. Donner une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près à l'aide de la méthode de dichotomie que l'on programmera en Python. Donner le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir cette valeur approchée.
4. Montrer que la fonction $\cos \circ \cos$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et y admet un unique point fixe. Montrer que ce point fixe est ℓ.
5. On s'interesse maintenant à la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0; 1]$.
   (b) Montrer que les 2 suites extraites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (v_{2n+1})$ sont monotones de sens contraires, et sont convergentes.
   (c) Montrer qu'elles convergent vers la même limite, et montrer que cette limite est ℓ.
   Rq : on peut donc en déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes ce qui donne un encadrement de ℓ par les termes de ces 2 suites.
   Ecrire cet encadrement pour tout n.

(d) Ecrire un programme python qui utilise v_n et w_n et permet d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. Donner le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir cette valeur approchée.

6. Majorer $\sin(x)$ sur $[0;1]$ par un nombre $k < 1$;
   puis en utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leqslant k^n$
7. En déduire un troisième programme en python qui permet d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.
8. Comparer la vitesse des 3 algorithmes.

.

Exercice 5 : Fonction définie à l'aide d'une intégrale.

Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ si $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $F(0) = 0$ et $F(1) = \ln(2)$.

1. Vérifier que F est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etudier le signe de F sur $\mathbb{R}^+$. (Attention au sens des bornes !)
3. (a) Soit $x > 0$, $x \neq 1$. Vérifier que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in]0;1[$,
   $$x^2 \ln 2 \leqslant F(x) \leqslant x \ln 2$$

   (c) Montrer que pour tout $x > 1$,
   $$x \ln 2 \leqslant F(x) \leqslant x^2 \ln 2$$

   (d) Montrer que F est continue en 0 et en 1.
4. Soit $x > 1$.
   En utilisant la monotonie de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ sur $[x, x^2]$, déterminer un encadrement de $F(x)$ pour $x > 1$.
   En déduire le comportement de F en $+\infty$.

5. (a) Montrer que F est dérivable sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. Calculer $F'(x)$ sur chacun de ces intervalles.

   (b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et déterminer $F'(0)$ et $F'(1)$.