***EXERCICE* 1 [AN_IntSe_7.tex].** Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ avec $n \geqslant 0$.
Montrer que : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geqslant 0$.

***SOLUTION* 1.** Le point clef est l'interprétation suivante : pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a : $\displaystyle\frac{1}{i+j+1} = \int_0^1 x^{i+j}\,\mathrm{d}x$. Sommons ensuite par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \int_0^1 a_i a_j x^i x^j\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} a_i a_j x^i x^j\right)\mathrm{d}x$.

Pour finir, comme les variables de sommation sont séparées, on obtient : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} = \int_0^1 \left(\sum_{0\leqslant i\leqslant n} a_i x^i\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$.

***EXERCICE* 2 [AN_IntSe_23.tex].** Soient $\lambda > 0$, et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On suppose que :
$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant \lambda^n n!$.

Q1) Montrer que f est nulle sur $\left[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right]$.
Q2) Montrer que f est nulle sur $\mathbf{R}$.

***SOLUTION* 2.** **Q1)** Pour cette question, il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale, pour tout $n \in \mathbf{N}$ à l'ordre $n-1$ puisque $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, puis de faire tendre n vers l'infini. En effet, on a pour tout $t \in \mathbf{R}$:
$\displaystyle f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \int_0^t \frac{f^{(n)(0)}(u)}{(n-1)!}(t-u)^n\,\mathrm{d}u$.
Majorons à présent en valeur absolue en utilisant les hypothèses :
$\displaystyle\left|f(t)\right| \leqslant \int_0^t \frac{\lambda^n n!}{(n-1)!}(t-u)^n\,\mathrm{d}u = (\lambda t)^n$ après calcul de l'intégrale. Le critère de convergence des suites géométriques permet alors de conclure : dès que $|\lambda t| < 1$, on a $f(t) = 0$.
Q2) L'idée est d'adapter la question **1)** à des versions translatées de f. Soit $n \in \mathbf{N}$, on étudie $g_n(x) = f(x - (n+1) \times \lambda)$. Puisque f s'annule sur $\left[\frac{n}{\lambda}, \frac{n+2}{\lambda}\right]$ si et seulement si g_n s'annule sur $\left[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right]$. Pour les entiers négatifs, considérer plutôt $g_n(x) = f(x + (n+1) \times \lambda)$. (...)

***EXERCICE* 3 [AN_IntSe_21.tex].** Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 - 2kn - 3n^2}$.

***SOLUTION* 3.** Technique classique, on essaie de former une somme de Riemann pour ensuite interpréter la limite comme une intégrale.
Plus précisément, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k/n)^2 - 2\frac{k}{n} - 3} \longrightarrow_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2x - 3}\,\mathrm{d}x$.
Il s'agit d'une fraction rationnelle, le trinôme apparaissant au dénominateur est de racines -1 et 3. On peut donc chercher A, B deux constantes telles que $\displaystyle\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{\mathrm{A}}{x+1} + \frac{\mathrm{B}}{x-3}$. On trouve ensuite :
$\displaystyle\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}\right)$, puis l'intégrale :
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln 3}{4}$.

***EXERCICE* 4 [AN_IntSe_20.tex].** Considérons $\displaystyle \mathrm{F} : x \in \mathbf{R}^+ \longmapsto \int_1^2 \frac{\sin(xu)}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$.
Q1) Montrer que F est continue en zéro.
Q2) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$, dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et calculer sa dérivée. ♣ Indication – On pourra effectuer un changement de variable.

Q3) Montrer que F est finalement dérivable en zéro.

SOLUTION 4. **Q1)** La première question se traite en majorant brutalement la valeur absolue. En effet, soit $x \in \mathbf{R}^+$, on a $\left|F(x)\right| \leqslant \displaystyle\int_1^2 \frac{|xu|}{u^{3/2}}\,du \leqslant |x| \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \longrightarrow_{x\to 0} 0 = F(0)$.
La fonction F est donc continue en zéro.
Q2) Le changement de variable $v = xu$ (affine, donc licite) permet d'aboutir à une nouvelle expression de F : $F(x) = \sqrt{x}\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin v}{v^{3/2}}\,dv$. Sur $\mathbf{R}^{+\star}$, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin v}{v^{3/2}}\,dv$ est dérivable, en tant que différence de deux intégrales à bornes variables de fonctions continues. La racine carrée l'étant aussi, on a que F est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$, avec en plus la formule suivante de dérivation :
$F'(x) = \dfrac{F(x)}{2x} + \dfrac{1}{x\sqrt{2}}(\sin(2x) - \sin(x))$. *C'est une équation différentielle en* F *que l'on pourrait s'amuser à résoudre....*
Q3) Rappelons l'encadrement suivant sur la fonction sin : $\forall y \in \mathbf{R}^{+\star},\quad 1 - \dfrac{y^2}{3} \leqslant \dfrac{\sin y}{y} \leqslant 1$. On obtient en encadrant F, plus précisément en faisant $y \leftarrow xu$, puis en divisant par $\sqrt{xu}$ et en intégrant en u entre un et deux : $\displaystyle\int_1^2 u^{-1/2}\,du - \frac{x^2}{3}\int_1^2 u^{3/2}\,du \leqslant \frac{F(x)}{x} \leqslant \int_1^2 u^{-1/2}\,du$. Le théorème d'encadrement permet de conclure : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \int_1^2 u^{-1/2}\,du$, donc F est bien dérivable aussi en zéro ! *Question : est-elle aussi C^1 ?*

EXERCICE 5 **[AN_IntSe_22.tex].** Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$.

SOLUTION 5. Technique classique, on essaie de former une somme de Riemann pour ensuite interpréter la limite comme une intégrale.
Plus précisément, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k/n)^2+1} \longrightarrow_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 6 **[AN_IntSe_1.tex].** Soient $f \in C^1(I, \mathbf{C})$ ne s'annulant par sur I et $a, b \in I$.
Q1) On pose pour tous $x \in I$, $\displaystyle g(x) = \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$. Montrer l'égalité $f = f(a)e^g$.
Q2) Si $f(a) = f(b)$, montrer que : $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \in \mathbf{Z}$.

⚠ **Attention.** Pas de logarithme complexe !

Q1) Comme $\dfrac{f'}{f}$ est bien définie, continue sur I, la fonction g est bien définie. Elle est même C^1 et on a $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Finalement f satisfait une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1, et s'écrit $f(x) = Ce^{g(x)}$, puis en évaluant en $x = a$, on trouve $C = f(a)$.
Q2) Supposons que $f(a) = f(b)$ et notons $Ind(f) = \displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \frac{1}{2i\pi}g(b)$. D'après la première question évaluée en b, on obtient $e^{g(b)} = 0$ puisque f ne s'annule pas sur I, *i.e.* $g(b) = Ind(f) \in 2i\pi\mathbf{Z}$ puisque g est à valeurs complexes. Ce qui achève la question.

EXERCICE 7 **[ALG_AppLin_15.tex].** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ l'endomorphisme u défini dans une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbf{R}^4$ par : $u(e_1) = e_3, u(e_2) = e_4, u(e_3) = u(e_4) = 0$.
Q1) A-t-on $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = \mathbf{R}^4$?
Q2) Déterminer la matrice de $u|_{\operatorname{Im} u}$ dans une base de $\operatorname{Im} u$.

SOLUTION 7. **Q1)** La matrice de u dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate immédiatement que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}\{e_3, e_4\} = \operatorname{Im} u$ et donc que la somme n'est pas directe.

Q2) La matrice de $u|_{\operatorname{Im} u}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 8 [ALG_AppLin_40.tex]. Soient E un **C**-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel qu'il existe un projecteur p de E vérifiant $u = p \circ u - u \circ p$.
Q1) Montrer que $u(\operatorname{Ker} p) \subset \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$.
Q2) En déduire $u^2 = 0$.
Q3) La réciproque est-elle vraie ?

SOLUTION 8. **Q1)** Soit $x \in \operatorname{Ker} p$, alors montrons que $u(x) \in \operatorname{Im}(p)$. Il suffit d'évaluer l'égalité $u = p \circ u - u \circ p$ en x pour avoir : $u(x) = p(u(x))$ donc $u(x) \operatorname{Im} p$.
D'autre part soit $x \in \operatorname{Im} p$ alors $p(x) = x$ puisque p est un projecteur. On a donc $u(x) = p(u(x)) - u(p(x)) = p(u(x)) - u(x)$. Donc $2u(x) = p(u(x))$ et $u(x) \in \operatorname{Im} p$, ce qui implique puisque p est un projecteur : $p(u(x)) = u(x)$. Reprenant l'égalité $u(x) = p(u(x)) - u(x)$, on trouve alors $u(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} u$.
Q2) Puisque p est un projecteur, l'espace se sépare en une somme directe : $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.
Soit donc $x \in \mathrm{E}$, montrons que $u^2(x) = u(u(x)) = 0_{\mathrm{E}}$ pour tout $x \in \operatorname{Ker} p$ d'une part, puis pour tout $x \in \operatorname{Im} p$ d'autre part. Le résultat s'en suivra alors par linéarité de u^2.
En effet, si $x \in \operatorname{Ker} p$, alors d'après **1)**, $u(x) \in \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$ donc $u^2(x) = 0$. Si maintenant $x \in \operatorname{Im} p$, alors $u(x) = 0$ donc *a fortiori* $u^2(x) = 0$ aussi.
Q3) A-t-on $u^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = p \circ u - u \circ p$ pour un certain projecteur p ? La réponse est oui.
En effet, on a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. N'importe quelle projection sur $\operatorname{Im} u$ convient, *i.e.* $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ projecteur tel que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} u$ (pour construire p, raisonner par exemple dans une base adaptée à $\operatorname{Im} u$) puisqu'on est en dimension finie. Ainsi, avec un tel choix, $p \circ u = u$ et $u \circ p = 0$, l'égalité est vérifiée.

EXERCICE 9 [ALG_AppLin_14.tex]. Soient E, F, G trois **K**-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.
Q1) Exprimer la proposition : $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})}$ en terme de noyau et d'image. Quelle relation déduit-on entre $\operatorname{Rg}(f)$, $\operatorname{Rg}(g)$ si E, F, G sont de dimension finie ?
Q2) Montrer que : $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

SOLUTION 9. **Q1)** Nécessairement $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$. Donc si on travaille en dimension finie, le passage à la dimension donne $\operatorname{Rg} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} g = \dim \mathrm{F} - \operatorname{Rg} g$ soit finalement $\boxed{\operatorname{Rg} f + \operatorname{Rg} g \leqslant \dim \mathrm{F}}$.
Q2) Montrer l'inclusion $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \subset f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$. Soit donc $y \in \mathrm{F}$ tel que $g(y) = 0$ et $y = f(x)$ avec $x \in \mathrm{E}$. Comme $g \circ f(x) = 0$, ceci implique que $y \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$.
Inversement soit donc $y \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$. Alors il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$ et $g \circ f(x) = 0$. D'une part, $g(y) = g \circ f(x) = 0$ donc $y \in \operatorname{Ker} g$. D'autre part, puisque $y \in \operatorname{Im} f$ est évident.

EXERCICE 10 [ALG_AppLin_39.tex]. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ unique vérifiant $\forall \mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}], \quad \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(a_k)$.

SOLUTION 10. Constater que l'application $\mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}] \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$ est un élément de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]^\star$.
D'autre part, montrons que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, l'application $\Phi_k : \mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}] \longmapsto \mathrm{P}(a_k)$ est une base de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]^\star$. Comme elle possède $n + 1 = \dim \mathbf{R}_n[\mathrm{X}] = \dim \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]^\star$ éléments, il suffit de démontrer qu'elle est libre dans $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]^\star$. En effet, soit $(\mu_0, \ldots, \mu_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mu_k \mathrm{P}(a_k) = 0$. Prenant pour P

un polynôme qui s'annule en tous les a_i sauf 1, on montre que $\mu_k = 0$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$.
La famille $\{\Phi_0, \ldots, \Phi_n\}$ est donc une base de $\mathbf{R}_n[X]^\star$, et comme précisé précédemment le résultat s'en suit.

***EXERCICE* 11 [AN_DL_24.tex].** Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites. On suppose : $u_n \neq 0, v_n \neq 0$ pour n assez grand.

Q1) Montrer l'équivalence : $e^{u_n} \sim_{n\to\infty} e^{v_n} \iff u_n - v_n \underset{n\to\infty}{=} o(1)$.

Q2) Montrer que si : $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, alors : $\ln u_n \sim_{n\to\infty} \ln v_n$.

***SOLUTION* 11.** **Q1)** $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{=} o(1)$. Alors calculons $\dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n} \longrightarrow_{n\to\infty} 1$ puisque $u_n - v_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. $\boxed{\Longrightarrow}$ Inversement, supposons $\lim\limits_{n\to\infty} e^{u_n - v_n} = 1$. Alors par composition des limites avec le logarithme, on trouve $u_n - v_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

Q2) Calculons $\dfrac{\ln v_n}{\ln u_n} = \dfrac{\ln\left(\frac{v_n}{u_n}\right) + \ln u_n}{\ln u_n} = 1 + \dfrac{\ln\left(\frac{v_n}{u_n}\right)}{\ln u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 + \dfrac{\frac{v_n}{u_n} + o\left(\frac{v_n}{u_n}\right)}{\ln u_n}$ puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$. Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to\infty} \ln u_n = \infty$, le second terme converge vers zéro et le résultat est établi.

***EXERCICE* 12 [ALG_AppLin_25.tex].** Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $k \in \{0, ..., n\}$, on pose $B_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

Q1) Montrer que $\mathrm{Vect}(B_0, ..., B_n) \subset \mathrm{Vect}(1, ..., X^n)$.

Q2) Montrer par récurrence sur n que $(B_0, ..., B_n)$ est une famille libre.

Q3) Pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k$. Montrer que φ définit un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

***SOLUTION* 12.** **Q1)** L'idée principale est la formule du Binôme. Comme

$$B_k = X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} (-1)^l X^{k+l} = \sum_{l=k}^{n} \binom{n-k}{l-k} (-1)^{l+k} X^l,$$

l'inclusion est assurée car pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $B_k \in \mathrm{Vect}(X^k, ..., X^n)$.

Q2) $B_0 = (1-X)^n$ est un polynôme non nul, (B_0) est donc libre. Supposons-là libre au rang n et soit $(\lambda_0, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2}$ tel que

$$(\lambda_0 B_0 + ... + \lambda_n B_n) + \lambda_{n+1} B_{n+1} = 0.$$

Précisons un peu, $B_0 = (1-X)^{n+1}$, $B_1 = X(1-X)^n$, ..., $B_n = X^n(1-X)^1, B_{n+1} = X^{n+1}$. Finalement on obtient une identité du type $(1-X) \times P_n = -\lambda_{n+1} B_{n+1}$. Mais 1 n'est pas racines de B_{n+1} donc nécessairement $\lambda_{n+1} = 0$, puis en appliquant l'hypothèse de récurrence (après avoir mis $X - 1$ ne facteur), on obtient la nullité des autres constantes. La famille est libre.

Q3) $\varphi : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ d'après la première question. Donc comme les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension, il suffit de démontrer l'injectivité. Soit donc P tel que $\varphi(P) = 0$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k = 0.$$

La famille des B_k étant libre, on obtient que pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $\binom{k}{n} P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, d'où $P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$. P admet donc $n+1$ racines, il est de degré n donc nul.